7. Transformationsformel

- Ab jetzt: $\mu = \mathcal{L}^n$.

Aus InFini:

$$\int_a^b f(2x)\,dx = \int_{2a}^{2b} f(x)\,\frac{dx}{2} \qquad \text{(Substitutions-regel)}$$

bzw

$$\int_a^b f(2x)\;2\,dx = \int_{2a}^{2b} f(x)\,dx$$

setze
- $\Phi(x) := 2x$
- Bijektion, $|\Phi'(x)| = 2$

$$\int_a^b f(\Phi(x))\,\underbrace{|\Phi'(x)|}_{\substack{\| \\ |\det \Phi'| \\ \text{"Verzerrungsfaktor"}}}\,dx = \int_{\substack{\Phi(a,b) \\ \| \\ (2a,2b)}} f(x)\,dx$$

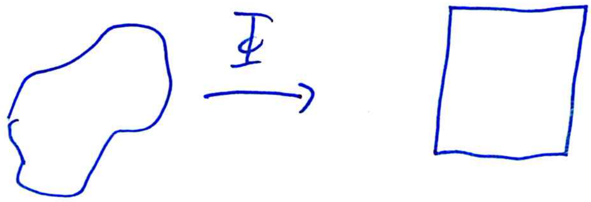
$\rightsquigarrow$ Transformationsformel $\hat{=}$ mehr-dimensionale Verallgemeinerung.

Def. 7.1 $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

$\Phi : X \to Y$ ist $(C^1\text{-})$ (C^k) **Diffeomorphismus**

$:\Leftrightarrow$
- Φ ist bijektiv
- $\Phi, \Phi^{-1} \in C^1$ (C^k), d.h. stetig k-mal diffbar.

$$\underset{\displaystyle D\Phi}{\underset{\shortparallel}{\nabla \Phi(x)}} = \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi^1 & \partial_2 \Phi^1 & \cdots & \partial_n \Phi^1 \\ \partial_1 \Phi^2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \Phi^n & \partial_2 \Phi^n & \cdots & \partial_n \Phi^n \end{pmatrix}$$



Satz 7.2 (Transformationsformel)

Sei $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus

a) $\forall \Omega \subseteq X$ messbar

$$|\Phi(\Omega)| \equiv \mathcal{L}^n(\Phi(\Omega)) = \int_\Omega |\det \underset{\displaystyle D\Phi}{\underset{\shortparallel}{\nabla \Phi}}| \, dx$$

b) $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf Y $\Leftrightarrow$ $f \circ \Phi(\cdot) \, |\det \nabla \Phi(\cdot)| : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf X

und dann gilt

$$\int_{\underset{\displaystyle \Phi(X)}{\underset{\shortparallel}{Y}}} f \, dx = \int_X f \circ \Phi \; |\det \nabla \Phi| \, dx$$

- $\cancel{\int_{B_1(0)} f(x)\, dx}$

$\boxed{B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2}$

"radiale Fkt"

$$\mathcal{L}^2(B_1) = \int_{B_1} 1 \, dx = \int_{r=0}^{\infty} r \int_{\theta=0}^{2\pi} \underbrace{\chi_{B_1(0)}(r\cos\theta, r\sin\theta)}_{\begin{cases} 1 & r \leq 1 \\ 0 & r \geq 1 \end{cases}} \, d\theta \, dr$$

$$= \int_{r=0}^{\infty} \chi_{[0,1)}(r) \; r \; 2\pi \; dr = 2\pi \int_0^1 r \, dr = \pi r^2 \Big|_0^1 = \pi$$

Hausdorff-maß ist Radon-Maß auf ∂B_1^{n-1}

- Allgemeine Formel: $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_{r=0}^{\infty} r^{n-1} \int_{\partial B_1^{n-1}} f(r\theta) \, d\mathcal{H}^{n-1}(\theta) \, dr$$

$(n-1)D$-Sphäre in $\mathbb{R}^n$

Falls $\boxed{f \text{ radial}}$ $(f(x) = g(|x|))$

- $= \omega_{n-1} \int_{r=0} r^{n-1} f(r) \, dr.$

$\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1^{n-1})$ = Oberfläche der $(n-1)$-sphäre.

Zum Beweis der Trafo: " $\Phi(x) \approx \Phi(x_0) + \nabla\Phi(\xi)(x-x_0)$ " Linearisierung von Φ

Lemma 7.4.

Sei T eine affin lineare Abbildung,

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also $Tx = Ax + b$ für ein $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt ~~det~~ $\mathcal{L}^n(T(\Omega)) = |\det(A)|\,\mathcal{L}^n(\Omega)$ $\forall\, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ω messbar

Beweis:

- Ist $\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}(A) \neq 0$, $\operatorname{Im}(A) \subsetneq \mathbb{R}^n$.

  Also ist $A(\Omega)$ enthalten in einem linearen UR $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\dim V \leq n-1$.

  Wegen $\mathcal{L}^n(V) = 0$ folgt auch $\mathcal{L}^n(A(\Omega)) = 0$.

  [Ü]: Überdeckung mit kleinen Würfeln: $\mathcal{L}^n$ ist rotationsinvariant $\Rightarrow$ OE $V = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$,

  Satz 3.31

- Sei also $\det A > 0$, A invertierbar.

(i) Angenommen $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ~~$\lambda_i > 0$~~,

dann gilt für einen Intervall $I = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$

$$A(I) = (\lambda_1 a_1, \lambda_1 b_1) \times \dots \times (\lambda_n a_n, \lambda_n b_n)$$

$$\mathcal{L}^n(A(I)+b) = \mathcal{L}^n(A(I)) = |\lambda_1| \cdot \ldots \cdot |\lambda_n|\, \mathcal{L}^n(I) = |\det(A)|\,\mathcal{L}^n(I)$$

Translationsinvarianz S. 3.31

(ii) A symmetrisch, ~~A positiv definit~~ $\Rightarrow A = P^T D P$, $P^T, P \in SO(n)$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\mathcal{L}^n(A(I)+b) = \mathcal{L}^n(A(I)) = \mathcal{L}^n(DP(I)) = |\det(D)|\,\mathcal{L}^n(I) = |\det(A)|\,\mathcal{L}^n(I)$$

Rotationsinvariant

~~$\mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$~~ $\mathrm{diag}(\pm 1, 1, \ldots, 1)$

(iii) $\det A \neq 0$

$$\Rightarrow \quad A = P \underbrace{\sqrt{A^T A}}_{\text{symmetrisch ~~positive~~ positiv-semidefinite Matrix}} \qquad \text{Für } P \in O(n), \text{ also } P = \overset{\shortparallel}{D} \underset{\in SO(n)}{\tilde{P}}$$

$$\mathcal{L}^n(A(\mathbb{I})) = \mathcal{L}^n(\sqrt{A^T A}\,\mathbb{I}) = \det(\sqrt{A^T A})\, \mathcal{L}^n(\mathbb{I})$$

$$= \sqrt{\det(A)^2} = |\det(A)|$$

~~□ 6.7.4.~~

$\Rightarrow$ Beh. gilt für Intervalle I

wie ~~hier~~ $\Rightarrow$ offene Mengen

$\Rightarrow$ alle (messbaren) Mengen

□ 6.7.4.