7.6 Satz von Sard

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : X \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Abbildung, $k = \max(n-m+1, 1)$, so ~~gilt~~ ist für

$$C := \{ x \in X : \text{Rang}(D\Phi(x)) < \cancel{m} \}$$ $\min(n,m)$

$\boxed{\Phi(C)}$ eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge.

Beweis (Für $\boxed{n = m, \Rightarrow k = 1}$)

- C ist $\mathcal{L}^n$-messbar, da C relativ abgeschlossen in X.
- Es reicht zu zeigen: $\Phi(C \cap Q)$ ist $\mathcal{L}^n$-Nullmenge $\forall$ Würfel Q mit $\overline{Q} \subseteq X$.

Fixiere $\varepsilon > 0$.

- $\exists\, \delta > 0$ s.d. $|D\Phi(x) - D\Phi(a)| < \varepsilon \quad \forall\, |x-a| < \delta$, $x, a \in Q$. $\Leftarrow \Phi \in C^1$
- $M := \sup_{x \in Q} |D\Phi(x)|$.

Zerlege $Q = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ (disjunkt) mit Seitenlänge von $Q_i = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$.

Fixiere ein $i \in \{1, \dots, N\}$.

Falls $Q_i \cap C \neq \emptyset$ wähle $a \in Q_i \cap C$.

Œ gilt dann:

~~(← $\mathcal{L}^n$ ist bewegungs Translationsinvariant)~~

$\cancel{\Phi(a) = 0}$

$$\mathrm{Im}(\underbrace{D\Phi(a)}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}}) \subseteq \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\} \quad (\leftarrow \text{rang } D\Phi(a) < n)$$

$$\longrightarrow \boxed{D\Phi^n(a) = 0}$$

Für $\alpha = 1, \dots, n$ sei $\Phi^\alpha(x)$ die α-te Komponente von $\Phi(x) \in \mathbb{R}^n$.

Es gilt $\forall x \in Q_i$, ~~$a \in Q_i$~~: $\exists \xi \in Q_i \subseteq Q$ (← MWS)

$$\Phi^\alpha(x) - \Phi^\alpha(a) = \underbrace{D\Phi^\alpha(\xi)}_{\in \mathbb{R}^n,\ |\cdot| \le M} \cdot \underbrace{(x-a)}_{|\cdot| \le \delta \ (x, a \in Q_i)}$$

← Wahl von M

Q_i convex

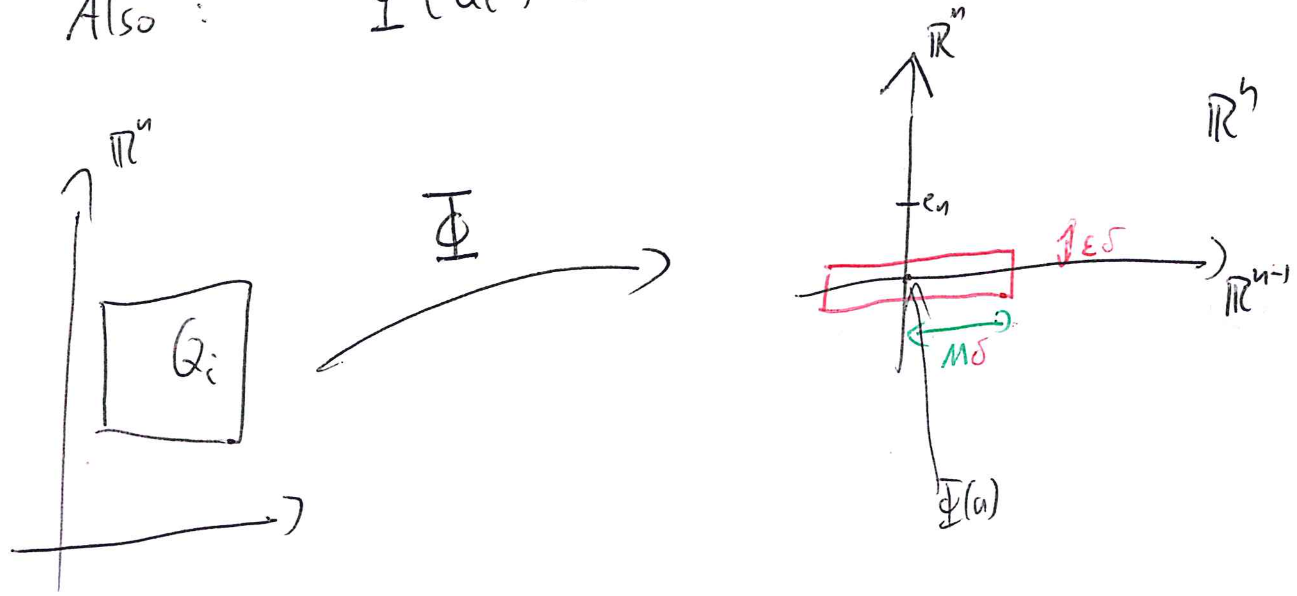
also $|\Phi^\alpha(x) - \Phi^\alpha(a)| \le M \cdot \delta \qquad \alpha = 1, \dots, n$

Für $\alpha = n$ ~~gilt~~ haben wir sogar eine bessere Abschätzung

$$|\Phi^n(x) - \Phi^n(a)| \le |D\Phi^n(\xi) - \underbrace{D\Phi^n(a)}_{= 0 \text{ da } \mathrm{Im}(D\Phi) \subseteq \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}}|\ |x-a|$$

$$\overset{\text{Wahl von } \delta}{\le} \varepsilon \delta$$

Also : $\Phi(Q_i) \subseteq \Phi(a) + [-M\delta, M\delta]^{n-1} \times [-\varepsilon\delta, \varepsilon\delta]$



$\mathcal{L}^n$ Translations-invariant

$\Longrightarrow$ $\forall\ Q_i$ mit $Q_i \cap C \neq \emptyset$:

$$\mathcal{L}^n(\Phi(Q_i)) \le \cancel{M}\ 2^n (M\delta)^{n-1}(\varepsilon\delta)$$

$$\le 2^n M^{n-1} \varepsilon \ n^{\frac{n}{2}} \mathcal{L}^n(Q_i)$$

$$\delta^n \approx \mathcal{L}^n(Q_i)$$

$\Longrightarrow$ $$\mathcal{L}^n(\Phi(C \cap Q)) \le \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^n(Q_i \cap C)$$

$$\le n^{\frac{n}{2}} 2^n M^{n-1} \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^n(Q_i)}_{= \mathcal{L}^n(Q)}.$$

Mit $\varepsilon \longrightarrow 0$: $\mathcal{L}^n(\Phi(C \cap Q)) = \emptyset.$

Korollar 7.7.

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: X \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar

$C = \{ x \in X : \mathrm{rang}(D\Phi(x)) < n \}$ "Kritischen Punkte von Φ"

Ist $\Phi|_{X \setminus C}$ injektiv so ist eine Fkt

$f: \Phi(X) \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-intbar auf $\Phi(X)$

$\Leftrightarrow$ $f \circ \Phi \; |\det D\Phi|$ $\mathcal{L}^n$-intbar auf X

und es gilt

$$\int_{\Phi(X)} f \, d\mathcal{L}^n = \int_X f \circ \Phi \; |\det D\Phi| \, d\mathcal{L}^n.$$

$\rightsquigarrow$ "$\det D\Phi \neq 0$ - Bedingung ist entfernt"

Satz 7.8

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\quad \Phi : X \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar,

$Y := \Phi(X)$, $\quad G = \{x \in X : \operatorname{rg} D\Phi(x) < n\}$

Für $y \in Y$ sei $N(y) := \# \{x \in X \setminus G : \Phi(x) = y\}$

$N \quad 1$ Falls Φ diffeomorph!

Dann ist $N_Y(\cdot)$ $\mathcal{L}^n$-messbar in Y

und $\forall f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}^n$-int'bar

$$\int_Y N_Y(y) \, f(y) \, dy = \int_X f \circ \Phi(x) \, |\det D\Phi(x)| \, dx$$

Beweis Mit Satz von Sard können wir annehmen,

dass $\cancel{\Phi G}$ $|\det D\Phi(x)| \neq 0 \quad \forall x \in X$. $\quad (\mathcal{L}^n \Phi\{x : |\det D\Phi(x)| = 0\}) = 0.)$

[Zeige sonst dafür Beh $\leadsto$

Sei $K \subseteq X$ kompakt.

Zu $x \in K$ $\exists$ nach Implizitem Funktionensatz/ Satz über die Inverse wegen $\det D\Phi(x) \neq 0$

offene Umgebungen U_x von x, V_x von $\Phi(x)$, so dass

$$\Phi\big|_{U_x} : U_x \longrightarrow V_x$$ ein C^1-Diffeomorphismus. (insbesondere injektiv!)

Da K kompakt $\Rightarrow$ $\exists\,(x_1, \dots, x_N)$ s.d.

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} U_{x_j}.$$

Setze $A_1 := U_{x_1} \cap K$, $A_\ell := U_{x_\ell} \cap K \setminus \bigcup_{j=1}^{\ell-1} A_j$

disjunkt, $\mathcal{L}^n$-messbar, $\bigcup_{j=1}^{N} A_j = K$.

Trafo-Regel $\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\Phi(A_j)} f(y)\,dy = \sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} f \circ \Phi(x)\,|\det D\Phi(x)|\,dx$$

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\Phi(A_j)} f(y)\,dy = \int \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \chi_{\Phi(A_j)}(y)}_{= N_K(y)\ \text{messbar!}} f(y)\,dy$$

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} f \circ \Phi(x)\,|\det D\Phi(x)|\,dx = \int_K f \circ \Phi(x)\,|\det D\Phi(x)|\,dx$$

$\Rightarrow$ Nimm Folge kompakter $K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \Omega$, so dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \Omega$.

$\rightsquigarrow$ Monotone Konvergenz $\Rightarrow$ Beh. $\square$