Beweis Transformationsformel (Satz 7.2)

(i) ~~Beh.~~ Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^{K} Q_i \subseteq X$ disjunkte Vereinigung von dyadischen Würfeln, $\overline{\Omega} \subseteq X$,

~~Es~~ Dann gilt $\mathcal{L}^n(\Phi(\Omega)) \leq \int_\Omega |\det(D\Phi)| \, d\mathcal{L}^n$.

Beweis: Idee: "$\Phi(x) \approx \underbrace{\Phi(a) + D\Phi(a)(x-a)}_{\text{affine Abb.}}$" um a

- Wegen $\overline{\Omega} \subset X$, X offen

  $\exists\, r > 0$ s.d. $\overline{B_r(\overline{\Omega})} := \{x \in \mathbb{R}^n,\ \operatorname{dist}(x, \overline{\Omega}) \leq r\} \subseteq X$.

- Zu $\varepsilon > 0$ können wir außerdem annehmen, (r ggf. ~~kleiner~~ kleiner)

$$\sup_{a \in \overline{\Omega}} \ \sup_{y \in B_r(a)} \| D\Phi(a) - D\Phi(y) \| < \frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}} \qquad (*) \qquad \Leftarrow D\Phi \text{ glm. stetig auf } B_r(\overline{\Omega})\,!$$

wobei

$$M := \sup_{y \in \overline{B_r(\overline{\Omega})}} |(D\Phi)^{-1}(y)| < \infty \quad \text{da } \overline{\Omega} \subset X$$

"$(D\Phi^{-1})(y)$"

kompakt

Durch Unterteilung der Q_i können wir OE annehmen

$\forall i$: Kantenlänge $Q_i = d < \frac{r}{\sqrt{n}}$. $\left(\Rightarrow \overline{Q_i} \subseteq B_r(b) \subset X \quad \forall b \in Q_i\right)$

Fixiere ein $i \in \{1, \dots, K\}$.

Wähle $a_i \in \overline{Q_i}$ mit

$$|\det(D\Phi(a_i))| = \min_{y \in \overline{Q_i}} |\det D\Phi(y)| > 0$$

Setze $T_i := D\Phi(a_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (= lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

Es gilt $\forall x \in Q_i$:

$d\sqrt{n} = \operatorname{diam} Q_i$ $\quad$ $x \in Q_i$

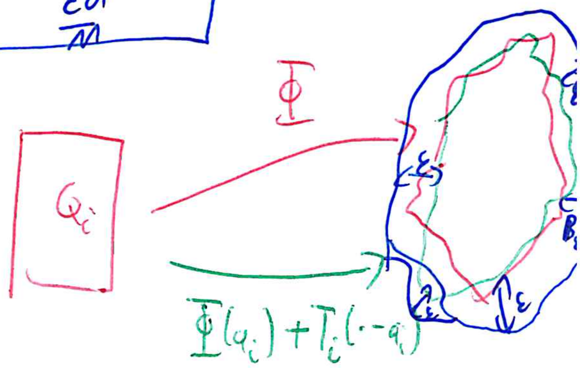
$$|\Phi(x) - \Phi(a_i) - T_i \cdot (x - a_i)| \overset{(*)}{\le} |x - a_i| \frac{\varepsilon}{\sqrt{n} M} \le \frac{d\varepsilon}{M}$$

$\|$ Hauptsatz Diff.-Int.-Rechnung

$$\left| \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\Phi(tx + (1-t)a_i)\right) dt - T_i(x - a_i) \right|$$

$$\le |x - a_i| \int_0^1 |D\Phi(\underbrace{tx + (1-t)a_i}_{\in Q_i \subseteq B_r(a_i)}) - T_i|$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(Q_i) \subseteq \Phi(a_i) + T_i(Q_i - a_i) + B_{\frac{\varepsilon d}{M}}(0).}$$



Nun gilt

$$T_i\left(T_i^{-1}(B_{\frac{\varepsilon d}{M}}(0))\right) \overset{\text{Wahl von } M}{\subseteq} T_i\left(B_{\varepsilon d}(0)\right)$$

$$\| $$

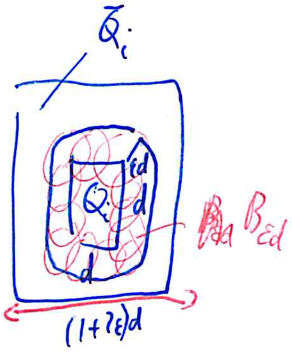
$$B_{\frac{\varepsilon d}{M}}(0)$$

$$\Rightarrow \Phi(Q_i) \subseteq \Phi(a_i) + T_i\left(Q_i - a_i + B_{\varepsilon d}(0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^n(\Phi(Q_i)) \le \mathcal{L}^n\big(\underbrace{\Phi(a_i)}_{\text{fixer Vektor!}} + T_i(Q_i - a_i + B_{\varepsilon d}(0))\big)$$

Translationsinvarianz

$$= \mathcal{L}^n\big(T_i(Q_i - a_i + B_{\varepsilon d}(0))\big)$$



Lemma 7.4

$$\le |\det(T_i)| \, \mathcal{L}^n(Q_i - a_i + B_{\varepsilon d}(0))$$

linearer Operator!

Translation

$$\le |\det(T_i)| \, \cancel{\mathcal{L}^n(Q_i) + (\varepsilon d)} \, \mathcal{L}^n\big(\underbrace{Q_i + B_{\varepsilon d}(0)}_{\subset \tilde{Q}_i}\big)$$

$\tilde{Q}_i$ Würfel mit Seitenlänge $(1+2\varepsilon)d$ $\Rightarrow \mathcal{L}^n(\tilde{Q}_i) = \mathcal{L}^n(Q_i)(1+2\varepsilon)^n$

$$\le |\det(T_i)| \, (1+2\varepsilon)^n \, \mathcal{L}^n(Q_i) \quad = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{Q_i} \, dx$$

$$= (1+2\varepsilon)^n \int_{Q_i} |\det(T_i)| \, dx$$

$$|\det(D\Phi(a_i))| \underset{\text{Wahl von } a_i}{\le} |\det D\Phi(x)| \quad \forall x \in Q_i$$

$$\le (1+2\varepsilon)^n \int_{Q_i} |\det D\Phi(x)| \, dx.$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^n(\Phi(\Omega)) \le \sum_{i=1}^K \mathcal{L}^n(\Phi(Q_i)) \le (1+2\varepsilon)^n \sum_{i=1}^K \int_{Q_i} |\det(D\Phi)(x)| \, dx$$

$$\overset{(Q_i)_{i=1}^K \text{ disjunkt}}{=} (1+2\varepsilon)^n \int_\Omega |\det D\Phi(x)| \, dx$$

// Beh. (i).

Lasse $\varepsilon \to 0$.

(ii) $\boxed{\forall\, \Omega \subseteq X \text{ messbar} : \mathcal{L}^n(\Phi(\Omega)) \le \int_\Omega |\det D\Phi|}$

Folgt wie üblich:

- OE $\operatorname{dist}(\Omega, \partial X) > 0$, sonst Finde Ω_k, $\operatorname{dist}(\Omega_k, \partial X) > 0$
  $\lim_{k\to\infty} \chi_{\Omega_k} = \chi_\Omega$. (monotone Kon

- Offene Mengen Ω lassen sich durch Ω wie in (i) approx.

$$\Phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi(Q_i).$$

- Ω messbar $\exists\, G_\varepsilon$ offen, $X \supseteq G_\varepsilon \supseteq \Omega$,
  messbar da Φ C^1
  nach Lemma 6.9.

$$\Phi(\Omega) \subseteq \Phi(G_\varepsilon)$$

Majorante $\chi_{G_1} |\det D\Phi|$

$$\mathcal{L}^n(\Phi(\Omega)) \le \mathcal{L}^n(\Phi(G_\varepsilon)) \le \underbrace{\int \cancel{X} |\det D\Phi|\, \chi_{G_\varepsilon}}_{} \xrightarrow[\text{dom. Konvergenz}]{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} |\det D\Phi|$$

∂X

(OE $\operatorname{dist}(G_\varepsilon, \partial X) > 0$ da $\operatorname{dist}(\Omega, \partial X) > 0$

//(ii)

(iii) $\boxed{\begin{array}{l} \forall f: Y \to [0,\infty] \quad \text{messbar} \\ \int_Y f\,dx \leq \int_X (f\circ\Phi)|\det D\Phi|\,dx \end{array}}$

Wie immer:

$$f_k(x) := \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x) \quad \text{für} \quad A_i \subseteq Y \quad \text{messbar}$$

$$a_i \geq 0.$$

$$f_k(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{punktweise (+monoton} \nearrow)$$

Setze $B_i := \Phi^{-1}(A_i)$ wieder messbar, $B_i \subseteq X$

$$(f_k \circ \Phi)(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} \circ \Phi(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{B_i}(x).$$

$$\Rightarrow \int_Y f_k\,dx = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{L}^n(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{L}^n(\Phi(B_i))$$

$$\overset{(ii)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{B_i} |\det D\Phi|\,dx = \int_X (f_k\circ\Phi)\,|\det D\Phi|\,dx$$

Mit monotoner Konvergenz folgt Beh.

//(iii)

(iv) $\forall f : Y \to [0,\infty]$ messbar:

$$\boxed{\int_Y f \, dx = \int_X (f \circ \Phi)(x) \, |\det D\Phi(x)| \, dx}$$

"$\leq$": schon gezeigt!

"$\geq$": Sei $\cdot\ g := (f \circ \Phi)\, |\det D\Phi(\cdot)| : X \to [0,\infty)$.

$\cdot\ \Phi^{-1} : Y \to X$ ist C^1-Diffeomorphismus

$$\overset{(iii)}{\Longrightarrow} \int_X g \leq \int_Y (g \circ \Phi^{-1}) \, |\det D\Phi^{-1}| \, dx$$

$$\int_X (f \circ \Phi) |\det D\Phi| \, dx = \int_X g$$

$$\left[\ \cancel{(D\Phi(x)) \circ \Phi^{-1}} = (D(\Phi^{-1}))^{-1} \right.$$

$$\left. I = D(\underbrace{id}_{x \mapsto x}) = D(\Phi \circ \Phi^{-1}) = (D\Phi) \circ \Phi^{-1}\, D(\Phi^{-1}) \ \right]$$

$$\boxed{1 = \det(D\Phi \circ \Phi^{-1}) \det D\Phi^{-1}}$$

$$= \int_Y f \, dx.$$

~~"$\geq$" Folgt aus~~ (iii).

Allgemeiner Fall folgt nun aus $f = f^+ - f^-$,

beachte auch, dass Satz 7.2 b) $\Rightarrow$ Satz 7.2 a) für $f = \chi_{\Phi(\Omega)}$.

Bsp 7.5

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right) = \sqrt{\pi}$$

Beweis:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\underbrace{(x^2+y^2)}_{|(x,y)^T|}}\,dx\,dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|(x,y)|^2}\,d(x,y)$$

radiale Fkt.

$$\overset{\text{Polar-Koordinaten}}{=} 2\pi \int_{r=0}^{\infty} r\,e^{-r^2}\,dr$$

$$\underset{\substack{z:=r^2 \\ dz=2rdz}}{\overset{\text{Substitution}}{=}} 2\pi \int_{z=0}^{\infty} e^{-z}\,\frac{dz}{2} = -\frac{2\pi}{2}\,e^{-z}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \pi$$

//

7.2 Satz von Sard

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : X \to \mathbb{R}^n$ ~~injektiv~~ C^1-Funktion.
injektiv

Transformationsregel besagt

$$\int_{\Phi(X \setminus C)} f \, d\mathcal{L}^n = \int_{X \setminus C} f \circ \Phi \; |\det \Phi| \, d\mathcal{L}^n$$

$\overset{\det \Phi = 0 \text{ auf } C}{=} \int_X f \circ \Phi \; |\det \Phi| \, d\mathcal{L}^n$

~~Falls~~ Für

$$C := \{ x \in X : \operatorname{rang} D\Phi(x) < n \}$$

"Kritische Punkte von Φ"

relativ abgeschlossene Menge in X !

~~leer ist.~~

Φ injektiv $\Rightarrow$ $\Phi|_{X \setminus C}$ Diffeo $\Rightarrow X \setminus C$ offen.

Idee: ~~Ist~~ Wäre $\Phi(C)$ Nullmenge

$$\Rightarrow \int_{\Phi(X)} f \, d\mathcal{L}^n = \int_X f \circ \Phi \; \underset{=0 \text{ ~~falls~~ in } C}{|\det \Phi|} \, d\mathcal{L}^n ?$$

7.6 Satz von Sard

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : X \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Abbildung,

$k = \max(n-m+1, 1)$, so ~~gilt~~ ist für

$$C := \{ x \in X : \operatorname{Rang}(D\Phi(x)) < \cancel{m} \ \min(n,m) \}$$

$\boxed{\Phi(C)}$ eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge.

Beweis (Für $\boxed{n = m, \Rightarrow k = 1}$)

- C ist $\mathcal{L}^n$-messbar, da C relativ abgeschlossen in X.
- Es reicht zu zeigen: $\Phi(C \cap Q)$ ist $\mathcal{L}^n$-Nullmenge $\forall$ Würfel Q mit $\overline{Q} \subseteq X$.

Fixiere $\varepsilon > 0$.

- $\exists\ \delta > 0$ s.d. $|D\Phi(x) - D\Phi(a)| < \varepsilon \quad \forall\ |x-a| < \delta$, $x, a \in Q$. $\Leftarrow \Phi \in C$
- $M := \sup_{x \in Q} |D\Phi(x)|$.

Zerlege $Q = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ (disjunkt) mit Seitenlänge von $Q_i = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$.