6. PRODUKTMAẞE / FUBINI / MEHRFACHINTEGRALE

Aus der InFini: $I = [a,b] \times [c,d]$, $f(x,y)$ stetig

$$\int_{\boxed{I}} f(x,y) \boxed{dx\, dy} = \boxed{\int_a^b \int_c^d} f(x,y) \boxed{dx\, dy}$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dy\, dx$$

$\rightsquigarrow$ Erweiterung auf Maße!

6.1 Fubini

Def. 6.1 (Produktmaße)

X, Y Mengen, μ, γ Maße auf X bzw. Y.

Das Produktmaß $\mu \times \gamma : 2^{X \times Y} \longrightarrow [0, \infty]$ wird für $S \subseteq X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$

definiert als

$$(\mu \times \gamma)(S) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\, \gamma(B_i) \;;\; S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i, \right.$$

$A_i \subseteq X$ μ-messbar, $B_i \subseteq Y$ γ-messbar, $i \in \mathbb{N}$.

(vgl. Caratheodory-Hahn-Erweiterung)

Bsp. 6.2
~~#7~~

$X = \mathbb{R}^k$, $Y = \mathbb{R}^l$

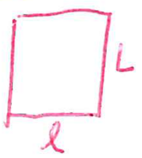
$\mu = \mathcal{L}^k$ $\quad \nu = \mathcal{L}^l$

Dann ist $\mu \times \nu = \mathcal{L}^{k+l}$ auf $\mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$.

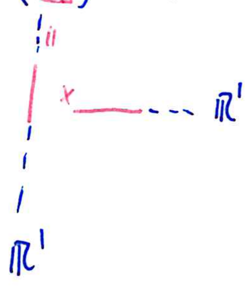
Satz 6.3 (Fubini)

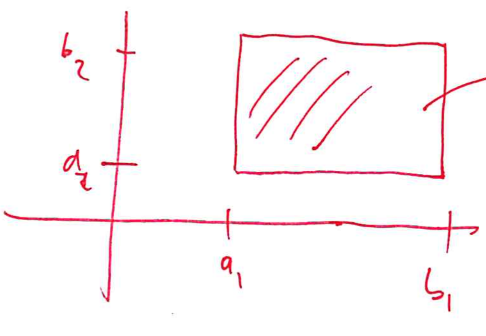
μ, ν Radon-Maße auf $X = \mathbb{R}^k$ bzw. $Y = \mathbb{R}^l$, $\mu \times \nu$ das Produktmaß auf $\mathbb{R}^n$, $n = k + l$. Dann gilt:

(i) Ist $S = A \times B$ für $A \subseteq X$ μ-messbar, $B \subseteq Y$ ν-messbar, so ist S $\mu\times\nu$-messbar und $\mu\times\nu(S) = \mu(A)\,\nu(B)$.



$$\mathcal{L}^2(\square) = \mathcal{L}^1(|) \cdot \mathcal{L}^1(—) = L \cdot l$$





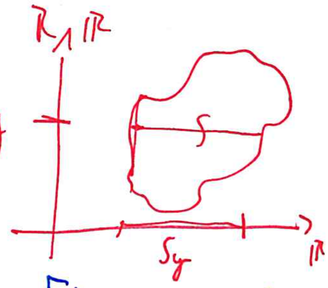
$= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

$\mathcal{L}^2([a_1,b_1] \times [a_2,b_2])$

$= \mathcal{L}^1([a_1,b_1])\ \mathcal{L}^1([a_2,b_2])$

(ii) Sei $\cdot\ S \subseteq X \times Y$ $\quad \mu\times\gamma$ - messbar,

$\cdot\ (\mu\times\gamma)(S) < \infty$



Dann ist $S_y := \{x \in X : (x, y) \in S\}$ für γ-a.e. $y \in Y$

$\boxed{(A \times B)_y = \begin{cases} A & y \in B \\ \emptyset & y \notin B \end{cases}}$

$\cdot$ μ-messbar und

$\cdot$ $y \longmapsto \mu(S_y) = \int_X \chi_S(x, y)\, d\mu(x)$

ist γ-integrabel mit

$$(\mu\times\gamma)(S) = \int_Y \mu(S_y)\, d\gamma(y) = \int_Y \left(\int_X \chi_S(x,y)\, d\mu(x) \right) d\gamma(y)$$

Analog für $S_x = \{y \in Y : (x, y) \in S\}$. $\int_X \int_Y$

(iii) $\mu\times\gamma$ ist Radon-Maß

(iv) Für $\mu\times\gamma$-integrables $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sind die Abbildungen

$$y \longmapsto \int_X f(x, y)\, d\mu(x), \text{ sowie}$$

$$x \longmapsto \int_Y f(x, y)\, d\gamma(y)$$

bzgl. γ bzw. μ-integrabel und es gilt:

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\gamma) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\gamma(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\gamma(y).$$

Zum Beweis setzen wir

$$\mathcal{F} := \{ S \subseteq X \times Y ;\ (*) \text{ und } (**) \text{ erfüllt} \}$$

mit $(*)$ $\quad x \longmapsto \chi_S(x,y)$ ist μ-messbar für γ-a.e. y

$(**)$ $\quad y \longmapsto \int_X \chi_S(x,y)\, d\mu(x) = \mu(S_y)$ ist γ-messbar.

Für $S \in \mathcal{F}$ setze

$$\rho(S) := \int_Y \int_X \chi_S(x,y)\, d\mu(x)\, d\gamma(y)$$

$\boxed{\text{Ziel:}}$ $\quad S$ $\mu\times\gamma$-messbar $\Rightarrow$ $\cdot\ S \in \mathcal{F}$

$\cdot\ \rho(S) = \mu\times\gamma(S).$

[beachte $\chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x)\, \chi_B(y) \leadsto \cdot\ \rho(S) = \mu(A)\, \mu(B)$ ⌋

$\cancel{\cdot (*)} \Rightarrow$

Also $\cancel{\iint_{X\times X} \chi_{A\times B}\, d\mu \times d\gamma}$ $\quad \int_{X\times Y} \chi_{A\times B}\, d(\mu\times\gamma) = \int_X \left(\int_Y \chi_{A\times B}\, d\gamma(y) \right) d\mu(x)$

$$= \int_Y \left(\int_X \chi_{A\times B}\, d\mu(x) \right) d\gamma(y)$$

Setze $\quad P_0 := \left\{ A \times B \,,\; \begin{array}{l} A \subseteq X \ \mu\text{-messbar} \\ B \subseteq Y \ \gamma\text{-messbar} \end{array} \right\}$

$$P_1 := \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \;;\; S_j \in P_0 \right\}$$

$$P_2 := \left\{ \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j \,,\; R_j \in P_1 \,\wedge\, \rho(R_1) < \infty \right\}$$

Lemma 6.4. $\quad P_k \subseteq \mathcal{F}, \; k = 0, 1, 2.$

Beweis: $\boxed{k=0}$ $\quad \chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x)\,\chi_B(y)$ ~~ist~~ (i)

Also $\quad x \longmapsto \chi_{A\times B}(x,y) \quad \mu\text{-messbar} \ \forall y$
Falls A μ-messbar.

$$\int_X \chi_{A\times B}(x,y)\, d\mu(x) = \chi_B(y)\,\mu(A) \quad \text{ist } \gamma\text{-messbar}$$
Falls B γ-messbar.

$\Rightarrow \quad P_0 \subseteq \mathcal{F}.$

Außerdem gilt $\quad \rho(A \times B) = \mu(A)\,\mu(B). \qquad \forall A\times B \in P_0.$

$\boxed{P_1 \quad n=1}$

Es gilt: $\underset{\substack{\Uparrow\\ P_0}}{(A_1 \times B_1)} \cap \underset{\substack{\Uparrow\\ P_0}}{(A_2 \times B_2)} = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in P_0$.

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = \underbrace{\big((A_1 \setminus A_2) \times B_1\big)} \cup \underbrace{(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)}$$

disjunkt!

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\Uparrow\\ P_0}}{S_n} = \cancel{\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_n} \quad \text{OE disjunkte } (S_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X \times Y$$

Ist also $S \in P_1 \Rightarrow$ OE $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underset{\in P_0}{S_j}$ disjunkt.

$\boxed{\text{Fixiere } y:}$

$$x \mapsto \chi_S(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{S_j}(x,y) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overset{\chi_{A_j}(x)\,\chi_{B_j}(y)}{\chi_{S_j}(x,y)}}$$

in x μ-messbar, da $S_j = A_j \times B_j$ messbar

Limes bleibt messbar.

Mit monotoner Konvergenz (Satz 5.20):

$$y \mapsto \int_X \chi_S(x,y)\, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{S_j}(x,y)\, d\mu(x)$$

ν-messbar!

Nochmal monotone Konvergenz:

$$\varrho(S) = \int_Y \left(\int_X \chi_S(x,y)\, d\mu(x) \right) d\gamma(y)$$

$$= \int_Y \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{S_j}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\gamma(y)$$

$$\overset{\text{Satz 5.20}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_Y \int_X \chi_{S_j}(x,y)\, d\mu(x)\, d\gamma(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \varrho(S_j).$$

- $\varrho(S) = \sum_{j=1}^{\infty} \varrho(S_j)$ für disjunkte $S_j \in P_0$.

- $P_1 \subseteq \mathcal{F}$.

~~$\boxed{k=2}$ Wie oben: $\cancel{\text{z.z.}}$ $P_2 \subseteq \mathcal{F}$.~~

~~Sei dazu $R = \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j$, $R_j \in P_1$, $\cancel{\varrho(R_j) < \infty}$ $\forall j \in \mathbb{N}$.~~

~~Sicherlich ist $\forall y \in Y$ $x \mapsto \chi_{\bigcap_{j=1}^{k} R_j}(x,y)$ μ-messbar,~~

~~$$= \chi_{R_1} \cdot \chi_{R_2} \cdot \ldots \cdot \chi_{R_k}$$~~

μ-messbar, da $R_i \in P_1$.

~~also ist $x \mapsto \chi_R(x,y)$ als Limes wieder μ-messbar~~

~~$\Rightarrow ⊛$~~

$\boxed{k=2}$ Zeige $P_2 \subseteq \mathcal{F}_1$

Sei dazu $R = \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j$, $R_j \in P_1$. $\varsigma(R_1) < \infty$.

Beachte: $R_1, R_2 \in P_1$

$$\Rightarrow \quad R_1 \cap R_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{S_i^1}_{\in P_0} \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{S_j^2}_{\in P_0}$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty} S_i^1 \cap S_j^2 \quad \in P_1$$

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in P_0$

Somit $\bigcap_{j=1}^{k} R_j \in P_1 \subseteq \mathcal{F} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Insbesondere ~~ohne~~ o BdA: $R_{j+1} \subseteq R_j$ (sonst $\tilde{R}_j := \bigcap_{i=1}^{j} R_i$).

$\varsigma(R_j) < \infty \quad \forall j$.

$$\varsigma(R) = \int_Y \int_X \chi_R(x,y) \, d\mu(x) \, d\nu(y)$$

$\le \chi_{R_1}(x,y) \Leftarrow$ Majorante, da $\varsigma(R_1) < \infty$

$$= \int_Y \int_X \lim_{j\to\infty} \chi_{R_j}(x,y) \, d\mu \, d\nu$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_Y \int_X \chi_{R_j}(x,y) \, d\mu \, d\nu = \lim_{j\to\infty} \varsigma(R_j),$$

(*), (**) erfüllt per Limes-Bildung

$\square$

Lemma 6.5 $\forall\, S \subset X \times Y: \quad (\mu\times\gamma)(S) := \inf\{\rho(R),\ S \subseteq R \in P_1\}.$

Beweis:

Sei $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i =: R \in P_1$

messbar

wie Rechnung oben

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\,\gamma(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i \times B_i) \geq \rho(R)$$

insbesondere $\inf\{\rho(R) \ldots\} \leq (\mu\times\gamma)(S).$

Andererseits $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i' \times B_i'$ disjunkt

$$\rightsquigarrow \rho(R) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j' \times B_j') = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j')\,\gamma(B_j') \geq \mu\times\gamma(S)$$

$\square$ L. 6.5.

Beweis von Fubini (i):

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{„}S = A \times B, \quad A\ \mu\text{-messbar}, \quad B\ \gamma\text{-messbar"} \\ \Rightarrow \quad S \text{ ist } \mu\times\gamma\text{-messbar}, \\ \quad \mu\times\gamma\,(S) = \mu(A)\cdot\gamma(B).\text{"} \end{array}}$$

Sei $A \times B \in P_0$. Mit Def. von $\mu \times \gamma$

$$(\mu \times \gamma)(A \times B) \leq \mu(A)\gamma(B) = \rho(A \times B) \leq \rho(R) \quad \forall R \supseteq A\times B, \ R \in P_1$$

$$\mu(A)\gamma(B) = \iint \chi_A \chi_B(y)\, d\mu(x)\, d\gamma(y)$$

Mit Lemma 6.5., $\inf_{\substack{R \supseteq A\times B \\ R \in P_1}}$

$$\mu\times\gamma(A\times B) \leq \mu(A)\,\gamma(B) \leq \mu\times\gamma(A\times B)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mu\times\gamma(A\times B) = \mu(A)\,\gamma(B).}$$

Es bleibt zu zeigen: S $\mu\times\gamma$-messbar.

Sei dazu $T \subseteq X \times Y$ beliebig,

Wähle $R \in P_1$ mit $R \supseteq T$.

$$R = \underbrace{R \setminus (A \times B)}_{\in P_1} \cup \underbrace{R \cap (A \times B)}_{\in P_1}$$ wie in Lemma 6.4. i) gesehen.

Also

$$(\mu \times \gamma)\,(T \setminus (A \times B)) + (\mu \times \gamma)\,(T \cap (A \times B))$$

$$\underset{L.6.5.}{\leq} \rho\,(\cancel{T \setminus A \times B}\; R \setminus (A \times B)) + \rho\,(R \cap (A \times B))$$

disjunkt

$$= \iint \left(\chi_{R \setminus (A \times B)} + \chi_{R \cap (A \times B)}\right) = \rho(R)$$

$\| \; \iint \chi_R$

$(\cancel{\ldots})$ Disjunktheit (siehe obige Rechnung)

Lemma 6.5.

$\rightsquigarrow$

Nimm $\inf\limits_{\substack{R \supseteq T \\ R \in P_1}}$

$$(\mu \times \gamma)\,(T \setminus (A \times B)) + (\mu \times \gamma)\,(T \cap (A \times B)) \leq \mu(\cancel{A \times B}\; T)$$

$\boxtimes$