Insbesondere

$P_0, \; P_1, \; P_2$ $\quad \mu\times\gamma$- messbar (da $\Sigma_{\mu\times\gamma}$ σ-Algebra),

und für $\underset{\substack{\wedge \\ P_2}}{R} = \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j^{\;\in P}$, $\quad \rho(R_j) < \infty \;\; \forall j \in \mathbb{N}$

$\mu\times\gamma(R) = \rho(R).$ $\quad$ mit Satz 3.11, und Lemma 6.4 -Rechnungen!

<u>Lemma 6.6</u> $\forall\; S \subset X\times Y \;\; \exists\, R \in P_2$ (oder $R = \mathbb{R}^n$) mit $S \subseteq R$,

$$\rho(R) = (\mu\times\gamma)(R) = (\mu\times\gamma)(S).$$

<u>Beweis:</u> OE $\;(\mu\times\gamma)(S) < \infty$ $\quad$ (sonst: $R := \cancel{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l}\; X\times Y$).

Mit Lemma 6.5. $\exists\; R_j \in P_1$ mit

$R_j \supseteq S$

$$(\mu\times\gamma)(S) \leq \rho(R_j) \leq (\mu\times\gamma)(S) + \tfrac{1}{j}. \quad < \infty$$

OE $\quad R_{j+1} \subseteq R_j$ $\quad$ (sonst $\tilde{R}_j := R_j \cap R_{j+1}$)

$$R := \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j. \quad \in P_2$$

$$\rho(R) = \lim_{j\to\infty} \rho\Big(\bigcap_{j=1}^{k} R_j\Big) = (\mu\times\gamma)(R).$$

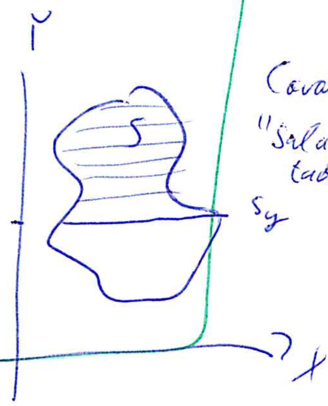
$\square$ L.6.6.

Beweis Fubini (ii)

ii) $S \subseteq X \times Y$ $\quad \mu\times\gamma$-messbar, $\quad \mu\times\gamma(S) < \infty$

- $S_y := \{x \in X : (x,y) \in S\}$ $\quad \mu$-messbar γ-a.e. y.
- $y \mapsto \mu(S_y)$ $\quad \gamma$- ~~messbar~~ integrabel

$$(\mu\times\gamma)(S) = \int_Y \mu(S_y)\, d\gamma = \rho(S). \leftarrow$$



Cavalieri "Salami-taktik"

~~1. Annahme $(\mu\times\gamma)(S) = \rho$~~

Sei $\quad R \supseteq S$, $\quad R \in P_2$ $\quad$ s.d. $\rho(R) = \mu\times\gamma(S)$ $\Leftarrow$ L.6.6.

1. Falls $(\mu\times\gamma)(S)=0$, $\rho(R)=0$.

Wegen $\quad 0 \le \chi_S \le \chi_R$ $\quad$ ~~über~~ alle $(x,y) \in X\times Y$

$\Rightarrow \rho(S) = 0$

$\Rightarrow \int \cancel{\chi_{S_y}}\,\mu(S_y)\, d\gamma(y) = 0 \Rightarrow \mu(S_y) = 0$ γ-a.e. y.

$\Rightarrow$ integrabel.

S_y μ-Nullmenge!

b) $(\mu\times\gamma)(S) = \underset{\underset{(\mu\times\gamma)(R).}{\|}}{\varrho(R)} > 0$

R $\mu\times\gamma$ - messbar als Vereinigung/Schnitt $\mu\times\gamma$-messbarer Mengen!

$(\mu\times\gamma)(\overset{R\setminus S}{\cancel{S\setminus R}}) = (\mu\times\gamma)(S) - (\mu\times\gamma)(R) = 0.$

~~L. 6.6. $\Rightarrow \exists\, T\in P_2$, $T \supseteq R\setminus S$, $\varrho(T) = \mu\times\delta(T) = 0.$~~

~~$\Rightarrow \underset{\underset{(\mu\times\gamma)(R\setminus S)}{\|}}{\varrho(R\setminus S)} = \varrho(T) = 0$~~

~~Also gilt~~

Es gilt $\cancel{S_y}$ $\chi_S(x,y) = \chi_R(x,y)$ $\mu\times\gamma$ - a.e.

& $\boxed{\varrho(R\setminus S) \leq \varrho(T) \overset{L.6.6}{=} \mu\times\gamma(R\setminus S) = 0 \quad \text{für ein } T \supseteq R\setminus S}$

$\Rightarrow$ ~~$\mu(S_y)$~~

$S_y = R_y \setminus (R\setminus S)_y$

Nullmenge γ-f.a. y

μ-messbar

$\cap \cup (A_i\times B_i)_y$

$\boxed{\begin{aligned} &\int\int \chi_{R\setminus S}(x,y)\, d\mu(x)\, d\gamma(y) = 0 \\ &\Rightarrow \mu((R\setminus S)_y) = 0 \quad \gamma\text{-a.e. } y. \end{aligned}}$

$\Rightarrow (R\setminus S)_y$ μ - Nullmenge für γ.-a.e. y.

$\Rightarrow S_y$ μ - messbar, da R_y μ-messbar,

$\mu(S_y) = \mu(R_y)$ γ-a.e. y

$\mu\times\gamma(S) = \varrho(R) = \int \mu(R_y)\, d\gamma = \int \mu(S_y)\, d\gamma$ $\square$ Fubini (ii)

Bew Fubini (iii) $\boxed{(\mu \times \gamma) \quad \text{Radon-Maß}}$

· Jede offene Menge S kann dargestellt werden als [4]

$$S = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \leftarrow \text{disjunkte Intervalle}, \quad Q_j = I \times J$$

halboffen

$I \subseteq X$, $J \subseteq Y$ Intervalle $\Rightarrow \mu$ bzw. γ-messbar

$\overset{\text{Fub. (i)}}{\Rightarrow}$ S $\mu \times \gamma$ -messbar.

$\Rightarrow$ $\mu \times \gamma$ Borelsch.

· Borel-Regulär: Wie $\boxed{\text{Lemma 6.6.}}$ $\rightsquigarrow$ Ersetze P_0, P_1, P_2 durch $P_{0/2} \cap \{\text{Borelsch}\}$.

$\Rightarrow$ P_2 ~~Borel-regul~~ $\subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l)$,

also Lemma 6.6. - Analogon $\Rightarrow$ Borel-Regularität.

· $K \subseteq X \times Y$ kompakt $\Rightarrow$ $K \subseteq [-a,a]^n \times [-a,a]^l$ für $a > 0$ groß genug

$$\overset{\mu, \gamma \text{ Radon}}{\Rightarrow} \quad \mu([-a,a]^n) < \infty$$
$$\gamma([-a,a]^l) < \infty$$

$$\Rightarrow (\mu \times \gamma)(K) \leq \mu([-a,a]^n)\, \gamma([-a,a]^l) < \infty.$$

$\square$ Fub. (iii)

Bew:
Fubini (iv)

$\mu \times \gamma$ - integrables $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$,
dann ist $y \mapsto \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$ γ - int'bar
$x \mapsto \int_Y f(x,y) \, d\gamma(y)$ μ - int'bar

$$\int_{X \times Y} f(x,y) \, d(\mu \times \gamma)(x,y) = \int_Y \int_X f(x,y) \, d\mu(x) \, d\gamma(y)$$
$$= \int_X \int_Y f(x,y) \, d\gamma(x) \, d\mu(y)$$

- Schon gezeigt in (ii) falls $f = \chi_S$. , $\mu \times \gamma(S) < \infty$

  f int'bar

- $f \geq 0 \Rightarrow f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{S_j}$

  $\mu \times \gamma$-messbar S. 4.4.

  $\Rightarrow$ Beh. gilt für $f_k(x,y) := \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{S_j}(x,y)$.

  $\xRightarrow{k \to \infty}$ Beh. gilt für $f \geq 0$.

  + Monotone Konvergenz S. 5.20

- f $\mu \times \gamma$ - ~~messb~~ int'bar $\Rightarrow$ Mit $f = f^+ - f^-$ Folgt Beh.

$\square$ Fubini

Korollar 6.7. (Tonelli)

Sonst vgl. Ü 42

Sei $f : X \times Y \to [0,\infty]$ bzgl. $\mu \times \gamma$ messbar.

$\exists$ ~~Ist~~ $\int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\gamma(y)$ oder $\int_X \int_Y f(x,y)\, d\gamma(y)\, d\mu(x)$

und ist <u>endlich</u>, so ist f $\mu\times\gamma$-integrabel.

<u>Bem:</u> Achtung $\exists \int \int_X f(x,y)\, d\mu \not\Rightarrow \iint_{X\times Y} \exists$.

6.2. Faltung:

- Sei $\mu = \mathcal{L}^n$ (gilt für Translationsinvariante Maße μ
  $\mu(x+A) = \mu(A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$)

- $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{L}^n)$ etc.

Betrachte $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$

Lemma 6.8 $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathcal{L}^n$-)messbar $\cancel{(\mathcal{L}^n)}$, so ist

$$F(x,y) := f(x-y) \;:\; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

messbar bzgl. $\mathcal{L}^{2n}$

Beweis:

$$F^{-1}([-\infty, a)) = \{ \underset{\in \mathbb{R}^{2n}}{(x,y)} : f(x-y) < a \}$$

$$= \{ (x, x-z) : f(z) < a \}$$

$$= T(\underbrace{\mathbb{R}^n \times \{ z \in \mathbb{R}^n : f(z) < a \}}_{\hookrightarrow\ \mathcal{L}^{2n}\text{-messbar nach Satz v. Fubini}})$$

$T(x,z) := (x, x-z)$

T ist glm Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}^{2n}$

Behauptung folgt aus Lemma 6.9. $\square$

Lemma B.9.

Sei $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ glm Lipschitz-stetig, d.h. $|T(x)-T(y)| \leq L|x-y|$ für ein $L \in [0,\infty)$. $\forall x,y$

$\forall A$ $\mathcal{L}^n$-messbar ist auch $T(A)$ $\mathcal{L}^n$-messbar.

Beweis:

(i) Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}^n(N)=0$

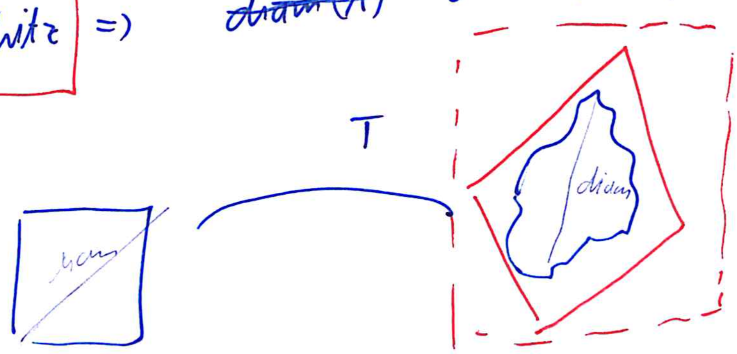
$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists G_\varepsilon \supseteq N$ mit $\mathcal{L}^n(G_\varepsilon)<\varepsilon$.

$$G_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^\varepsilon \leftarrow \text{Würfel, disjunkt.}$$

Also $T(N) \subseteq T(G_\varepsilon) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} T(Q_j^\varepsilon)$,

da T $\boxed{\text{Lipschitz}}$ $\Rightarrow$ ~~diam(A)~~ $\operatorname{diam}(T(A)) \leq L \operatorname{diam} A$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Insbesondere



$\exists$ $C(n)>0$ s.d. $\mathcal{L}^n(T(Q_j^\varepsilon)) \leq C(n) L^n \mathcal{L}^n(Q_j^\varepsilon)$

Also $\mathcal{L}^n(T(N)) \leq C(n) L^n \mathcal{L}^n(G_\varepsilon) \leq \varepsilon\, C(n) L^n$ $\forall \varepsilon>0$

$\overset{\varepsilon \downarrow 0}{\Rightarrow}$ $\mathcal{L}^n(T(N))=0$.

(ii) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$- messbar

$\underset{S.\,3.46}{\Rightarrow}$ $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup N$ F_k kompakt, $\mathcal{L}^n(N)=0$.

$\underset{T \text{ stetig}}{\overset{\boxed{\text{Ü}}}{\Rightarrow}}$ $T(F_k)$ kompakt. $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^n$- messbar

$\Rightarrow$ $T(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(F_k) \cup \underbrace{T(N)}$

$\uparrow$ (i)

$\mathcal{L}^n(T(N))=0 \Rightarrow T(N)$ $\mathcal{L}^n$-messbar

$\mathcal{L}^n$-messbar

$T(A)$ ist $\mathcal{L}^n$- messbar. $\square$ L 6.19

f, g $\mathcal{L}^n$- messbar,

"Faltung"

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, g(\cancel{x}-\cancel{z})\, dz = g*f(x)$$

translationsinvariant $\boxed{\text{ü}}$

wenn immer dies existiert

Schon gesehen

- Fourier-Transformation: $\widehat{f \cdot g} = f*$
- $f \in C_c^\infty \Rightarrow f*g \in C^\infty$, $g \in L^p$

Satz 6.10 (Young / Faltungssatz)

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p, q, r \le \infty$, $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

Dann ist $f*g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{L}^n$) messbar und es gilt

$$\|f*g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \quad (*)$$

Beweis: Mit Lemma 6.8 ist $F(x,y) := f(x-y)\,g(y)$ ~~$f(z)\,g(x-z)$~~ $\mathcal{L}^{2n}$- messbar

(Produkt von messbaren Fkt!)

~~Mit~~ Mit Korollar 6.7. (Tonelli) und Bsp. 5.8 (integrabel ⇒ uneig. int'bar)

Reicht es zu zeigen, das $(*)$ gilt ~~Für~~ mit $|f|$, $|g|$.

$\int_{\mathbb{R}^n}$

Sei zunächst $\boxed{1 < p, r, q < \infty \text{ oder } \begin{matrix} p=1 & , r, q < \infty \\ q=1 & , r, p < \infty \end{matrix}}$ -21-

Dann gilt $\boxed{\frac{r}{p}, \frac{r}{q} \geq 1}$ und

$$\boxed{\frac{1}{r} + \frac{r-p}{pr} + \frac{r-q}{rq} = 1}$$

Also mit Hölder (3-Fach $\boxed{\ddot{\text{U}}}$) $\boxed{x \text{ fest}}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}}\right) |f(x-y)|^{\overbrace{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}^{\geq 0}} |g(y)|^{\overbrace{q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)}^{\geq 0}}\,dy$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{\frac{p}{r}r} |g(y)|^{\frac{q}{r}r}\,dy\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int |f(x-y)|^{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{r-p}{pr}\right)^{-1}}\,dy\right)^{\frac{r-p}{pr}} \left(\int |g(y)|^{q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\frac{rq}{r-q}}\,dy\right)^{!}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int |f(x-y)|^p\,dy\right)^{\frac{r-p}{pr}} \|g\|_{L^q}^{\frac{r-q}{r}}$$

$\overset{\text{Translationsinvarianz}}{=}$ $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{r-p}{r}}$

Beide Seiten $\int_{\mathbb{R}^n} (\ )^r\,dx$

$\rightsquigarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \right|^r \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{r-p} \, \|g\|_{L^q}^{r-q} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \,dy\,dx$$

~~Fubini~~

$$\cancel{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |}$$

Fubini:

$$\rightsquigarrow \|f\|_{L^p}^p \, \|g\|_{L^q}^q = \int |g(y)|^q \,dy \int |f(x)|^p dx$$

$$\cancel{= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}} \overset{\text{Linear}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q \, |f(x)|^p dx \; dy$$

$$\overset{\text{Translations invariant}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dx \; dy < \infty$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \, |g(y)|^q \,dy\,dx < \infty$$

Fubini!

da $\iint < \infty$ dürfen wir vertauschen

$$= \|f\|_{L^p}^r \quad \|g\|_{L^q}^r .$$

$\square$

$\boxed{p=\infty\,,\ r=\infty,\ q=1}$

$$\sup_x \left| \int f(x-y)\, g(y)\, dy \right| \le \sup_x \|f\|_{L^\infty} \int |g(y)| = \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$$

$\boxed{r=\infty\,,\ \cancel{p=1},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}$

$$\sup_x \int |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \underset{\text{Hölder}}{\le} \|f(\cancel{x}-\cdot)\|_{L^p} \|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

$\square$ Young