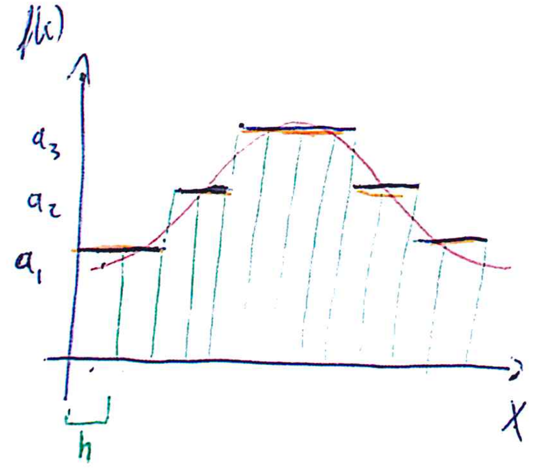
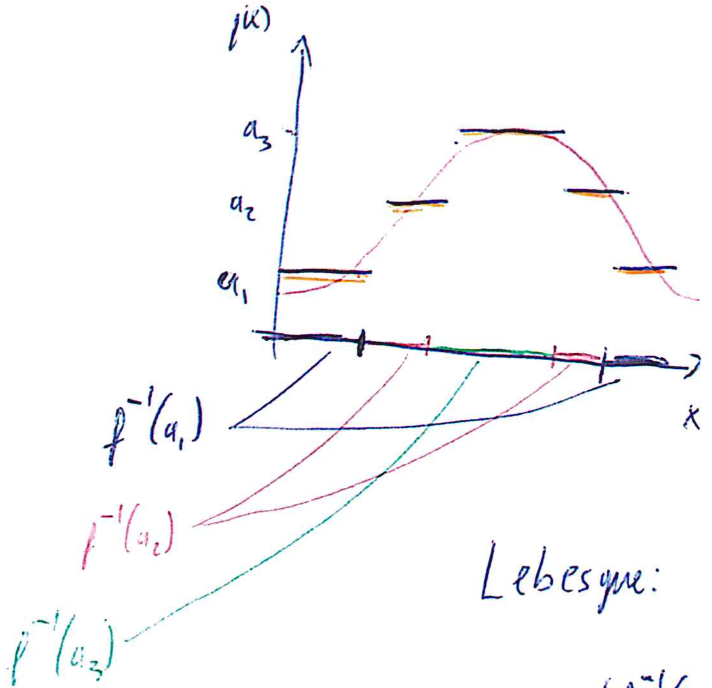
5 Integration:



f Riemann

$h\,a_1 + h\cdot a_1 + h\cdot a_2 + h\,a_2 + \dots$



f

Lebesgue:

$$\mu(f^{-1}(a_1))\cdot a_1 + \mu(f^{-1}(a_2))\cdot a_2 + \mu(f^{-1}(a_3))\cdot a_3$$

Sei immer

μ Radon-Maß, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ μ-messbar.

Jede messbare Fkt approximierbar "Treppenfkt" ← Satz 4.4.

Def. 5.1

$g: \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt $\boxed{(\sigma\text{-}) \text{ Treppenfunktion}}$ (engl.: simple function)

falls g nur abzählbar viele Fkt.-werte annimmt:

$g(\Omega) = \mathrm{im}(g)$ abzählbar.

Def. 5.2 (Integral für Treppenfkt)

(i) g μ-messbar, nicht-negative Treppenfkt: $g: \Omega \to [0,\infty]$.

$$\int_\Omega g \, d\mu = \begin{cases} \sum\limits_{0 \le a < \infty} a \, \mu(g^{-1}(\{a\})) \le \infty, & \text{falls } g < \infty \ \mu\text{-f.ü.} \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

"schreibe dx für $d\mathcal{L}^n$"

$\boxed{\text{"}0 \cdot \mu(g^{-1}(\{0\})) := 0\text{"}}$

(ii) $g \; \cancel{\mu\text{-m}}: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbare Treppenfkt:

$, g = g^+ - g^-,$ $\boxed{\int_\Omega g^+ < \infty \text{ oder } \int_\Omega g^- < \infty}$

Dann

$$\int_\Omega g \, d\mu = \begin{cases} \int_\Omega g^+ d\mu - \int_\Omega g^- d\mu & \text{falls } |g| < \infty \text{ } \mu\text{-f.ü.} \\ +\infty & \mu(g^{-1}\{+\infty\}) > 0 \\ -\infty & \mu(g^{-1}\{-\infty\}) > 0 \end{cases}$$

Ist $f \le g$ beides Treppenfkt & $\int_\Omega f \, d\mu$, $\int_\Omega g \, d\mu$ $\exists$ $\Rightarrow$ $\int_\Omega f \, d\mu \le \int_\Omega g \, d\mu$ $\boxed{\text{ÜA}}$

Beisp. 5.3

- $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} 1_{[k,k+1)}(x)$ $\quad x \in \mathbb{R}$.

  $\hookrightarrow$ nicht-negative Treppenfkt, also

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dx = \sum_{0<a<\infty} a \, \mathcal{L}^1(f^{-1}(\{a\}))$$

$$f^{-1}(a) = \begin{cases} [k,k+1) & a = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} \underbrace{\mathcal{L}^1([k,k+1))}_{= 1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} = +\infty.$$

- $g(x) = \cancel{f(x) \ f(-x)} \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ -f(-x) & x < 0 \end{cases}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{k} \chi_{(k,k-1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{(k,k+1)}$$

$$\int g^+ = f, \qquad g^- = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{|k|} \chi_{(k,k+1)}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g^+ \, dx = \int_{\mathbb{R}} g^- \, dx = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g^{\cancel{+}} \, dx \quad \lightning$$

Def. 5.4.

(i) Ist $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar:

$$\overline{\int_\Omega} f \, d\mu = \inf \left\{ \int_\Omega g \, d\mu \; ; \; \begin{array}{l} g \text{ ist } \mu\text{-messbare Treppenfkt.} \\ f \le g \;\; \mu\text{-a.e.} \\ \int_\Omega g^- \, d\mu < \infty \end{array} \right\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

oberes Integral

unteres Integral

$$\underline{\int_\Omega} f \, d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, d\mu \; ; \; \begin{array}{l} \varphi \;\; \mu\text{-messbare Treppenfkt.} \\ f \ge \varphi \;\; \mu\text{-a.e.} \\ \int_\Omega \varphi^+ \, d\mu < \infty \end{array} \right\}$$

~~[illegible] gilt:~~

(ii) Gilt $\overline{\int_\Omega} f \, d\mu = \underline{\int_\Omega} f \, d\mu$, so heißt f **uneigentlich μ-integrabel / μ-integrierbar** & $\int_\Omega f \, d\mu = \overline{\int_\Omega} f \, d\mu \equiv \underline{\int_\Omega} f \, d\mu$

- KLAR: $\underline{\int_\Omega} f \, d\mu \le \overline{\int_\Omega} f \, d\mu$ $\Leftarrow$ Monotonie
- Konsistenz: $\underbrace{\int_\Omega f \, d\mu}_{\text{Def. 5.2}} = \underbrace{\int_\Omega f \, d\mu}_{\text{Def. 5.4.}}$ $\square$

Beispiel 5.5.

Jede μ-messbare Fkt $f \geq 0$ ist uneigentlich integrabel:

Zunächst: $\boxed{\mu(\Omega) < \infty}$

1. Angenommen $\mu(f^{-1}(+\infty)) > 0$.

~~Es gilt~~ Sei $g_k := \begin{cases} 0 & f(x) < \infty \\ +k & f(x) = \infty \end{cases}$

$\Rightarrow \quad g_k$ Treppenfkt, $\underset{\uparrow\, f \geq 0}{g_k \leq f}$,

$$\int_\Omega g_k \, d\mu = k \underbrace{\mu(f^{-1}(+\infty))}_{\substack{\vee \\ 0}} \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty.$$

$< \infty$

Also $\underline{\int_\Omega} f \, d\mu \geq \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega g_k \, d\mu = +\infty.$

Andererseits $\infty = \underline{\int_\Omega} f \, d\mu \leq \overline{\int_\Omega} f \, d\mu$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_\Omega} f = \overline{\int_\Omega} f$$

✓

2. $\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) \cancel{<\infty}$ $=0$

~~Auch ist~~ Nehme zunächst an: $\mu(\Omega) < \infty$

Sei $\varepsilon > 0$

$$A_k := \{x \in \Omega : k\varepsilon \le f(x) < (k+1)\varepsilon\} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

$$= f^{-1}([k\varepsilon, (k+1)\varepsilon])$$

$f \ge 0$

$$e := \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} k \chi_{A_k} \qquad g := \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \chi_{A_k}$$

(falls $\int_\Omega e^+ d\mu = \infty$ $\Rightarrow$ $e_N = \sum_{k=0}^{N} (\varepsilon k) \chi_{A_k}$

$$e(x) \le f(x) \le g(x) \quad \mu\text{-a.e.}$$

Also
$$\int_\Omega e \, d\mu \le \underline{\int_\Omega} f \, d\mu \le \overline{\int_\Omega} f \, d\mu$$

$$\le \int_\Omega g \, d\mu = \int_\Omega (e) \, d\mu + \varepsilon \mu(\Omega)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon(k+1) \mu(A_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon k \mu(A_k) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon \mu(A_k)$$

$$\underset{\substack{\bigcup A_k = \Omega \\ \text{disjunkt!}}}{=} \int_\Omega e \, d\mu + \varepsilon \mu(\Omega)$$

Falls $\mu(\Omega) < \infty$:

$\lim_{\varepsilon \to 0}$ impliziert $\underline{\int_\Omega} f \, d\mu = \overline{\int_\Omega} f \, d\mu$

Falls $\mu(\Omega) = \infty$

$\mathbb{R}^n = \bigcup_{l=1}^\infty Q_l$ disjunkte Q_l Würfel.

mit obiger Rechnung $\rightsquigarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Treppenfkt. e_l, $g_l : \Omega \cap Q_l \to \overline{\mathbb{R}}$

$e_l \le f \le g_l$ auf ~~Ω_l~~ ~~$\cap Q_l$~~ $\underline{\underline{\Omega \cap Q_l}}$

$$\int_{\Omega \cap Q_l} g_l \, d\mu \le \int_{\Omega \cap Q_l} e_l \, d\mu + 2^{-l} \varepsilon$$

$e := \sum_{l=1}^\infty e_l$, $g := \sum_{l=1}^\infty g_l$ μ-messbare Treppenfkt.

$e \le f \le g$

$$\int_\Omega e \, d\mu \le \underline{\int_\Omega} f \, d\mu \le \overline{\int_\Omega} f \, d\mu \le \int_\Omega g \, d\mu \le \int_\Omega e \, d\mu + \varepsilon.$$

Behauptung folgt mit $\varepsilon \to 0$ $\square$

Satz 5.6.

Seien $f_1, f_2 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ uneigentlich μ-integrabel.

Falls $f_1 \geq f_2$ μ.a.e. so gilt

$$\int_\Omega f_1 \, d\mu \geq \int_\Omega f_2 \, d\mu.$$

Def. 5.2 / Def. 5.

[insbesondere: $\int_\Omega d\mu$ konsistent!]

Beweis: $\forall$ g μ-messbare TreppenFkt, $g \geq \underset{\underset{f_2}{\vee|}}{f_1}$ μ.-a.e. ~~gilt~~ $\int_\Omega g^- \, d\mu < \infty$ gilt:

$$\int_\Omega g \, d\mu \geq \overline{\int_\Omega} f_2 \, d\mu$$

da auch $g \geq f_2$

$\overset{\inf_g}{\Rightarrow}$

$$\overline{\int_\Omega} f_1 \, d\mu \geq \overline{\int_\Omega} f_2 \, d\mu$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\int_\Omega f_1 \, d\mu \qquad \int_\Omega f_2 \, d\mu .$$

$\square$

Def. 5.7 (μ-integrabel)

$f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar heißt integrabel (später in $L^1(\Omega, \mu)$)

Falls $\boxed{\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty.}$

"$\to$ absolut Konvergent"

Beispiel 5.8

(i) f μ-integrabel $\Rightarrow$ f uneigentlich μ-integrabel

(ii) $f = 0$ μ-a.e $\Rightarrow$ f μ-integrabel & $\int_\Omega f \, d\mu \overset{\int |f|}{=} 0.$

Klar: Wähle $e = g = 0$ als Treppenfkt.

Beweis (i) . $f = f^+ - f^-$,

$f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$

f^+, f^- μ-messbar, nicht-negativ $\overset{\text{Bsp. 5.5}}{\Rightarrow}$ f^+, f^- ~~μ-messbar~~ uneigentlich integrabel

~~Außerdem $0 \leq f^\pm \leq f \Rightarrow f$~~

f

$$\Rightarrow \overset{\forall \varepsilon>0}{\exists} \quad e^+ \le f^+ \le g^+$$

$$e^- \le f^- \le g^-$$

Treppenfkt

s.d.

⊛

$$0 \le \int_\Omega e^\pm \, d\mu \le \int_\Omega f^\pm \, d\mu \le \int_\Omega g^\pm \, d\mu$$

$$\le \int_\Omega e^\pm \, d\mu + \varepsilon < \infty.$$

$$\int_\Omega f^\pm \, d\mu \le \int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$$

Satz 5.6.

~~$A^\pm := \{x : f^\pm(x) > 0\}$ μ-messbar~~

~~$\Rightarrow$ OE $e^\pm = g^\pm = 0$ in $\Omega \setminus A^\pm$~~

$$\overbrace{(g^+ - e^-)}^{g} - \overbrace{(e^+ - g^-)}^{e} \le (g^+ - e^+) + (g^- - e^-)$$

$$⊛ \Rightarrow \int_\Omega (g-e)\, d\mu < 2\varepsilon$$

Setze $e := e^+ - g^-$, $g := g^+ - e^-$

$$\Rightarrow e \le f^+ - f^- = f \le g \quad \mu\text{-a.e.}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\int_\Omega e \, d\mu} \le \underline{\int_\Omega} f \, d\mu \le \overline{\int_\Omega} f \, d\mu \le \boxed{\int_\Omega e \, d\mu} + 2\varepsilon.$$

Limit $\varepsilon \to 0$ $\Rightarrow$ □

Satz 5.9.

Seien $f_1, f_2 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ uneigentlich μ-integrabel mit $\underline{f_1 = f_2 \ \mu\text{-a}}$

Dann gilt $\underline{\int_{\Omega_1} f \, d\mu = \int_{\Omega_2} g \, d\mu}$.

Beweis: $\boxed{\text{Ü}}$ (direkt aus Satz 5.6.)

Satz 5.10 (Tschebyschev-Ungl.)

$f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel. Dann gilt

$$\forall a > 0 \qquad \mu(\underbrace{\{x \in \Omega : |f(x)| \geq a\}}_{f^{-1}([a,\infty])}) \leq a^{-1} \int_\Omega |f| \, d\mu$$

Beweis $\boxed{\text{Ü}}$

Korollar 5.11 $f, f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel mit

$p > 0$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu = 0$ "L^p-Konvergenz"

Dann gilt: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ und $f_{n_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ μ-a.e. für ~~$n \to \infty$~~ TF $n_i \to \infty$.

Beweis

Mit Satz 5.10:

$$\mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)|^p \geq \varepsilon^p\})$$

$$\leq \varepsilon^{-p} \int_\Omega |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$$= \mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\})$$

Punktweise μ-a.e. Konvergenz folgt mit Satz 4.16 (Falls $\mu(\Omega) < \infty$) $\square$ 5.5.

$\hookrightarrow$ Falls $\mu(\Omega) = \infty$ wähle Ω_n mit $\mu(\Omega_n) < \infty$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$. + Diagonalfolge.

Satz 5.12

$f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann

$$\int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu$$

$$\int_\Omega \lambda f \, d\mu = \lambda \int_\Omega f \, d\mu.$$

Beweis $\boxed{\text{Ü}}$

Korollar 5.13

$f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel. Dann $\left|\int_\Omega f \, d\mu\right| \le \int_\Omega |f| \, d\mu$.

Beweis: $-|f| \le f \le |f|$, also

Satz 5.6 $\Longrightarrow$

$$\int_\Omega f \, d\mu \le \int_\Omega |f| \, d\mu$$

$$\int_\Omega -f \, d\mu = -\int_\Omega f \, d\mu \le -\int_\Omega -|f| \, d\mu = \int_\Omega |f| \, d\mu$$

S. 5.12

Lemma 5.14

$f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel, sei $\Omega_1 \subseteq \Omega$ μ-messbar.

Dann
- $f_1 := f \chi_{\Omega_1}$ auf Ω μ-integrabel
- "$f|_{\Omega_1}$" f auf Ω_1 integrabel
- $$\int_{\Omega_1} f \, d\mu = \int_\Omega (f \chi_{\Omega_1}) \, d\mu$$

Beweis

(i) Sei g Treppenfkt auf Ω, μ-messbar.

- $g\chi_{\Omega_1}$ ist Treppenfkt. auf Ω
- $g|_{\Omega_1}$ —"— Ω_1

& $$\int_\Omega g\,\chi_{\Omega_1}\,d\mu = \int_{\Omega_1} g\,d\mu.$$

(ii) $\forall\ g \le f \le h$: Treppenfkt.:

$$\int_{\Omega_1} g\,d\mu \le \int_{\Omega_1} f\,d\mu \le \int_{\Omega_1} h\,d\mu$$

$$\|\qquad\qquad\qquad\qquad\|$$

& $$\int_\Omega g\,\chi_{\Omega_1}\,d\mu \le \int_\Omega f\chi_{\Omega_1}\,d\mu \le \int_\Omega h\,\chi_{\Omega_1}\,d\mu$$

Wählen wir nun z.B. $h \ge f \ge g$ Treppenfkt mit

$$\left.\begin{array}{l}\int_\Omega f \ge \int_\Omega h - \varepsilon \\ \int g \ge \int f - \varepsilon\end{array}\right] - (*)$$

innere!

$$0 \le \overline{\int_{\Omega_1}} f \, d\mu - \underline{\int_{\Omega_1}} f \, d\mu \le \int_{\Omega_1} h \, d\mu - \int_{\Omega_1} g \, d\mu$$

$$= \int_{\Omega_1} (h-g) \, d\mu$$

$$\overset{(!)}{=} \int_{\Omega} \underbrace{(h-g)}_{\ge 0} \chi_{\Omega_1} \, d\mu$$

$$\le \int_{\Omega} (h-g) \, d\mu = \int_{\Omega} h \, d\mu - \int_{\Omega} g \, d\mu$$

$$\cancel{= \overline{\int_{\Omega}} f - \underline{\int_{\Omega}} f}$$

$$\overset{(*)}{\le} 2\varepsilon$$

Analog

$$0 \le \overline{\int_{\Omega}} f \chi_{\Omega_1} - \underline{\int_{\Omega}} f \chi_{\Omega_2} \le 2\varepsilon$$

$\Longrightarrow$ f auf Ω_1 und $f \chi_{\Omega_1}$ auf Ω uneig. μ-integrabel.

Außerdem:

$$\int_{\Omega_1} f_{*} \, d\mu - \int_{\Omega} f \chi_{\Omega_1} \, d\mu$$

$$\leq \int_{\Omega_1} h_{*} \, d\mu - \int_{\Omega} g \chi_{\Omega_1} \, d\mu \overset{(i)}{=} \int_{\Omega} (h-g) \chi_{\Omega_1} \, d\mu < 2\varepsilon$$

& analog:

$$\int_{\Omega_1} f - \int_{\Omega} f \chi_{\Omega_1} > -2\varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \longrightarrow 0$ folgt Beh.

$\square$ 6.5.14

Koroller 5.15

Ist $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel, $\Omega_1 \subseteq \Omega$ mit $\mu(\Omega_1)=0$,

so $\int_{\Omega_1} f \, d\mu = 0.$

Beweis:

$f \mathbb{1}_{\Omega_1} = 0$ μ-a.e., also $\int_{\Omega_1} f \overset{L.5.14}{=} \int_{\Omega} f \mathbb{1}_{\Omega_1} \overset{S.5.9.}{=} 0$

Vergleich Riemann – Lebesgue-Integral:

Satz 5.16. (Lebesgue)

Q abgeschlossener Würfel in $\mathbb{R}^n$, $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt.

f ist Riemann-integrabel $\iff \mathcal{L}^n(\underbrace{\{x_0 \in Q : f \text{ ist unstetig in } x_0\}}_{=: \Delta_f}) = 0$

"Riemann-Integral kann nur fast überall stetige Fkt. integrieren" !

Beweis

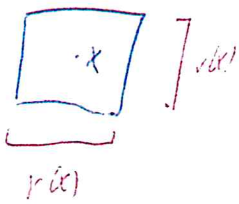
(i) Sei $\mathcal{L}^n(\Delta_f)=0$.

Sei $\varepsilon>0$ fixiert. Wähle $G \supseteq \Delta_f$ offen s.d.

$$\mathcal{L}^n(G\setminus\Delta_f)<\varepsilon.$$

$K := Q\setminus G$ kompakt, (und f ist glm. stetig auf K!)

$\forall x\in K$ $\exists\, r(x)$ so dass für $Q_{r(x)}$ der offenen Würfel um x mit Kantenlänge $r(x)$



$$\boxed{\operatorname{osc}_{Q_r(x)} f \equiv \sup_{Q_r(x)\cap Q} f - \inf_{Q_r(x)\cap Q} f < \varepsilon.}$$

$\bigcup_{x\in K} Q_{r(x)}$ überdeckt K $\overset{K \text{ kompakt}}{\leadsto}$ $\exists\, (x_i)_{i=1}^N$ s.d. $\bigcup_{i=1}^N Q_{r_j(x_i)} \supseteq K$.

Rest $R := Q \setminus \bigcup_{i=1}^N Q_{r(x_i)}$ $\subseteq G$ ist Elementarfigur

$$\underset{\substack{|||\\ \text{Jordansche Maß } (R)}}{\text{vol}(R)} = \mathcal{L}^n(R) \le \mathcal{L}^n(G) < \varepsilon.$$

Sei P Elementarfigur $\bigcup_{i=1}^N Q_{r(x_i)}$, setze $M := \sup_{x\in Q} |f(x)| \overset{\text{da } f \text{ beschr.}}{<} \infty$

Riemannsche Treppenfktn: (∈) Treppenfkt mit endlichem Bild)

$\underline{x \in P:}$

$$e(x) = \max\{\inf_{Q_i} f : x \in Q_i\}, \quad g(x) = \min\{\sup_{Q_i} f : Q_i \ni x\},$$

$\underline{x \notin P.}$

$$e(x) = -M \qquad g(x) = M.$$

Es gilt

$$e(x) \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in Q.$$

$$0 \le g - e \le \varepsilon \text{ auf } P, \qquad g - \varepsilon \overset{R}{=} 2M \text{ auf } Q \setminus P.$$

$|\inf_{Q_i} F - \sup_{Q_i} f| < \varepsilon.$

$\underset{\text{osc}}{P}$

$$\boxed{g - e \le \varepsilon \chi_P + 2M \chi_{Q \setminus P}}$$

Riemann

$$0 \le R\text{-}\overline{\int_Q} f\,dx - R\text{-}\underline{\int_Q} f\,dx \le \cancel{R\text{-}}\int_Q (g-e)\,d\cancel{x} < \varepsilon \cancel{\text{vol}}(P) + 2M\,\text{vol}(R)$$

$$\le \varepsilon(\mathcal{L}^n(Q) + 2M)$$

gleich auf endlichen Treppenfkt

Mit $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$ gilt f ist Riemann-integrierbar //