(ii) Sei $\mathcal{L}^n(\Delta_f) > 0$

f unstetig in x_0

$(\Leftrightarrow) \exists \varepsilon > 0 \, \forall r > 0 : \operatorname{osc}_{Q_r(x_0)} f > \varepsilon$

Schreibe: $\Delta_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_f^{\frac{1}{k}}$

wobei $\Delta_f^{\varepsilon} = \{x \in Q : \forall r > 0 , \operatorname{osc}_{Q_r(x)} f > \varepsilon\}$

Dann $\exists k_0$ s.d. $\mathcal{L}^n(\Delta_f^{\frac{1}{k_0}}) > 0$. (Sonst $\mathcal{L}^n(\Delta_f) = 0$ ↯)

Seien $e, g : Q \to \mathbb{R}$ <u>Riemannsche</u> Treppenfkt ($\not\exists$ $g(Q)$, $e(Q)$ <u>endlich</u> viele Werte)

$\boxed{e(y) \leq f(y) \leq g(y)}$ <u>$\forall y \in Q$</u> (<u>nicht</u> nur $\mathcal{L}^n$-a.e.)

$\Rightarrow \mathcal{L}^n(\Delta_e) = \mathcal{L}^n(\Delta_g) = 0$ &

& $\forall x \in \Delta_f^{\frac{1}{k_0}} \setminus (\Delta_e \cup \Delta_g)$

$\boxed{\exists r > 0 \text{ s.d. } g, e \text{ konstant auf } Q_r(x)}$

gilt $g(y) - e(y) \geq \frac{1}{k_0}$ $\forall y \in Q_r(x)$

$\boxed{g(y) \geq \sup_{y \in Q_r} f(y) \geq \inf_{y \in Q_r} f(y) \geq e(y)}$

für ein offenes Q_r mit Seitenlänge r.

$\boxed{\text{gilt nicht für Lebesgue-TF!}}$

$\Rightarrow \boxed{(g - e) \geq \frac{1}{k_0} \chi_{\Delta_f^{\frac{1}{k_0}} \setminus (\Delta_e \cup \Delta_g)}}$

$\geq \frac{1}{k_0}$ ~~auf Menge~~ pos. Maß

endliche Treppen Riemann integral = Lebesgue ~~auf Treppen Fkt.~~

$$\int_Q g \, dx - \int_Q e \, dx = \int_Q \underbrace{(g-e)}_{\geq 0} dx ~~= \sum_{-\infty < a < \infty} a \, \mathcal{L}^n((g-e)^{-1}(a))~~$$

~~$(g-e)^{-1}([\frac{1}{k_0}, \infty)) \geq \inf F \frac{1}{k_0} \sum_{k=1}^{K} \operatorname{vol}(A_k) \geq \frac{1}{k_0} \mathcal{L}^n(\Delta_f^{\frac{1}{k_0}}) > 0.$~~

~~$\geq \frac{1}{k_0} \mathcal{L}^n((g-e)^{-1}(\frac{1}{k_0}))$~~

~~Def. Lebesgue-Maß~~

~~A_k so dass $\bigcup_{k=1}^{K} A_k \supset \Delta_f^{\frac{1}{k_0}} \setminus (\Delta_e \cup \Delta_g)$~~

~~disj. Elementarfiguren~~

$$\geq \int_Q \frac{1}{k_0} \chi_{\Delta_f^{\frac{1}{k_0}} \setminus (\Delta_e \cup \Delta_g)} = \frac{1}{k_0} \mathcal{L}^n(\Delta_f^{\frac{1}{k}}) > 0$$

$$\Rightarrow \int_Q g - \int_Q f \not\to 0$$

$\Rightarrow f$ nicht Riemann-integrierbar.

□ 5.16

Korollar 5.17

Jede beschränkte, Riemann-integrierbare Fkt. $f: \Omega \to \mathbb{R}$ auf einer beschränkten, Jordan-messbaren Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist auch $\mathcal{L}^n$-messbar & $\mathcal{L}^n$-integrabel, und Integrale sind gleich.

Beweis

OE $\Omega = Q$ Würfel [~~setz~~ sonst wähle $\Omega \subseteq Q$

$f(x) = 0$ ~~$\forall x \in Q \setminus Q$~~ $\forall x \in Q \setminus \Omega$.]

Mit Satz 5.16 gilt $\mathcal{L}^n(\Delta_f) = 0$.

Also $f|_{Q \setminus \Delta_f}$ ist stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^n$-messbar auf $Q \setminus \Delta_f$.

Bsp. 4.9.

$\underset{\Delta_f \text{ Nullmenge}}{\Rightarrow}$ f ist $\mathcal{L}^n$-messbar auf Q.

* Jede ~~Zwei~~ Riemannsche Treppenfkt sind auch Treppenfkt bzgl. Def. 5

$\forall x \in \Omega$

Es gilt $\underline{R\text{-}\int_\Omega} f = \sup\left\{\int_\Omega g ,\ g \overset{(+)}{\le} f^{(+)} ; g \text{ R-Treppenfkt}\right\} \le \underline{\int_\Omega} f \, d\mathcal{L}^n$

endlich viele

und $\overline{\int_\Omega} f \, d\mathcal{L}^n \le R\text{-}\overline{\int_\Omega} f \, dx$

Also : Ist f R-integrabel $\Rightarrow R\overline{\int} = R\underline{\int}$

$\Rightarrow \underline{\int_\Omega} f \, d\mathcal{L}^n \ge \overline{\int_\Omega} f \, d\mathcal{L}^n \Rightarrow$ "$\le$" immer wahr $\underline{\int_\Omega f \, d\mathcal{L}^n = \overline{\int_\Omega} f \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega}$

$\square$

5.2. Konvergenzsätze

(μ Radon-Maß, Ω μ-messbar)

Satz 5.18 (Fatous Lemma)

"Unterhalb stetigkeit des Integrals" bzgl. punktweiser Konvergenz

Sei $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, $f_k : \Omega \to [0,\infty]$, f_k μ-messbar.

(Wichtig vgl. $\boxed{\text{Ü}}$)

Dann gilt

$$\int_\Omega \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu$$

messbar nach Satz 4.3

uneigentlich int'bar, da $f_k \geq 0$ (vgl. Bsp. 5.5)

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass

$\forall$ Treppenfkt $0 \leq g(x) \leq f(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$ $\forall x \in \Omega$

gilt: $$\int_\Omega g \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu$$

Sei g solch eine Treppenfkt: Wähle Darstellung:

$$g = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \chi_{A_j} \quad \text{mit} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$$

$$\& \ \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j = \Omega$$

$$\& \ a_0 = 0 \ , \ a_j > 0 \ \forall j \neq 0.$$

Fixiere $t \in (0,1)$.

$\forall j \in \mathbb{N}$: Zerlege $A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{j,k}$,

wobei $B_{j,k} = \{ x \in A_j , \ f_\ell(x) > t a_j$ Für alle $\ell \geq k$

(beachte $\liminf_{k \to \infty} f_k(x) \geq a_j \quad \forall x \in A_j$!)

- Es gilt: $B_{j,k} \subseteq B_{j,k+1} \quad \forall k, j$

S.3.11 $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{k \to \infty} \mu(B_{j,k}) = \mu(A_j)}$

Es gilt: $\forall J \in \mathbb{N}$ fest:

$$f_k(x) \geq \sum_{j=1}^{J} \chi_{A_j} f_k(x)$$

also

Monotonie + Linearität des $\int d\mu$

$$\int_\Omega f_k \, d\mu \geq \sum_{j=1}^{J} \int_\Omega \chi_{A_j} f_k(x) \overset{L.5.14}{=} \sum_{j=1}^{J} \int_{A_j} f_k(x)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{J} \int_{B_{j,k}} f_k \, d\mu$$

$\left[f_k \chi_{B_{j,k}} \geq t a_j \chi_{B_{j,k}} \right.$ per Def. von $\left. B_{j,k} \right]$

$$\geq \sum_{j=1}^{J} t \int_{B_{j,k}} a_j \chi_{B_{j,k}} \, d\mu$$

$$= \sum_{j=1}^{J} t \, a_j \, \mu(B_{j,k}) \xrightarrow{k\to\infty} \mu(A_j)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu \geq t \sum_{j=1}^{J} a_j \, \mu(A_j)$$

$$\Big\downarrow J\to\infty$$

$$\to t \int_\Omega g \, d\mu .$$

gilt $\forall t \in (0,1)$

Beh. Folgt mit $t \to 1$. $\square$ S 5.1

Beispiel 5.19

Seien $f_k, f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel, $k \in \mathbb{N}$,

und es gelte

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

"$f_k \to f$ in $L^1(\Omega,\mu)$"

Sei $H \geq 0$ eine Caratheodory-Fkt (vgl. Def. 4.7.)

Dann:

$$\boxed{\int_\Omega H(\cancel{x}, f(\cancel{x})) \, d\mu(\cancel{x}) \leq \underbrace{\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega H(x, f_k(x)) \, d\mu(x)}_{= I}}$$

Beweis: Wähle TF $(k_i \to \infty)$ so dass:

- $\int_\Omega H(x, f_{k_i}(x)) \, d\mu \xrightarrow{i\to\infty} I \in \overline{\mathbb{R}}$
- $f_{k_i} \xrightarrow{\mu} f$ (gemäß Kor. 5.11)
- $f_{k_i} \to f$ μ-f.ü. (— " —)

Dann gilt

$$H(x, f_{k_i}(x)) \xrightarrow{i\to\infty} H(x, f(x)) \quad \boxed{\mu\text{-a.e.}}$$

Mit ~~Sat~~ Fatou (S. 5.18)

$$\int_\Omega H(x, f(x))\, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega H(x, f_{k_i}(x))$$

$$\le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega H(x, f_k(x))$$

Wahl von I.

□

Satz 5.20 (Beppo-Levi / Monotone Konvergenz)

Sei $f_k : \Omega \to [0,\infty]$ μ-messbar mit

$f_1 \le f_2 \le \dots \le f_{k+1}$ $\forall k.$ μ-a.e.

Dann folgt

$$\int_\Omega \underset{\substack{\| \\ \limsup \\ \| \\ \liminf}}{\lim_{k\to\infty}} f_k(x)\, d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\, d\mu .$$

da f_k monoton

Beweis

Es gilt: $\forall j \in \mathbb{N}$: $\boxed{f_j(x) \leq \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad \mu\text{-a.e } \forall x \in \Omega}$

⇑ Monotonie der f_k!

Also (Monotonie des Integrals)

$$\limsup_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \cancel{(x)} \, d\mu \leq \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k(x) \, d\mu$$

Mit Fatou (Satz 5.18)

$$\int_\Omega \underset{\underset{\liminf}{\|}}{\lim_{k\to\infty} f_k(x)} \, dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \, d\mu$$

$\boxed{\liminf \leq \limsup}$ $\Rightarrow$ "=".

∎

Satz 5.21 (Lebesgue / Dominierte Konvergenz)

Sei $g: \Omega \longrightarrow [0,\infty]$, $f, f_n: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar mit

$\uparrow$ μ-integrabel

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq g$ μ-a.e.

  $\nwarrow$ "Majorante"

- $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ μ-a.e.

Dann gilt:

$$\left| \int_\Omega f_n \, d\mu - \int_\Omega f \, d\mu \right| \overset{\text{(Kor. 5.13)}}{\leq} \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Beweis:

- $|f| = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n| \leq g \underset{\substack{\uparrow \\ g \ \mu\text{-integrabel!}}}{<} \infty$ μ-a.e.

$\Rightarrow$ • $|f_n - f| \leq 2g$ μ-a.e. $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ • $f_n - f$ μ-integrabel.

• $2g - |f_n - f| \geq 0$ μ-a.e.

$\lim\limits_{n\to\infty} 2g - |f_n - f| = 2g$ μ-a.e

Also:

① $$\int_\Omega 2g\,d\mu = \int_\Omega \liminf_{k\to\infty} (2g - |f_k - f|)\,d\mu$$

$\boxed{\text{Fatou S.5.18}}$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega (2g - |f_k - f|)\,d\mu$$

$$= \int_\Omega 2g\,d\mu \;\cancel{+}\; \underline{-}\; \lim\cancel{\inf}\sup_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f|\,d\mu$$

$\wedge$

∞

Also: $\boxed{\limsup_{k\to\infty}\int_\Omega |f_k - f|\,d\mu \leq 0}$ $\quad \int_\Omega |f_k - f| \geq 0 \quad \forall k.$ $\square$

~~Wieder Fatou gibt andererseits:~~

$$\cancel{\boxed{\liminf_{k\to\infty}\int_\Omega |f_k - f|\,d\mu} \;\boxed{\geq}\; \int_\Omega \liminf_{k\to\infty} |f_k - f|\,d\mu = \int_\Omega 0\,d\mu = \boxed{0}.}$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$ S. 5.21.

Korollar 5.22 (Differenzieren unter dem Integral)

Sei $f = f(x,y) : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

(i) Für festes x ist $y \mapsto f(x,y)$ auf $[0,1]$ Lebesgue-integrabel.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert und ist glm. beschränkt (lokal glm. beschränkt reicht!)

Dann ist $y \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ für festes $x \in \mathbb{R}$ über $[0,1]$ $\mathcal{L}^1$-int'bar,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Beweis:

Es gilt: (Linearität des Integrals) $\forall h \neq 0$

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\int_0^1 f(x+h,y)\,dy - \int_0^1 f(x,y)\,dy}{h} & = & \int_0^1 \dfrac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\,dy \\ \Big\downarrow h \to 0 & & \Big\downarrow h \to 0 \quad \text{für festes } y \\ \dfrac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)\,dy & & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array}$$

Zeige also

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \int_0^1 \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\,dy = \int_0^1 \frac{d}{dx} f(x,y)\,dy}$$

Wähle beliebige Folge $h_k \to 0$, $h_k \neq 0$, $\underline{x \text{ Fest.}}$

setze

$$g_k(y) := \frac{f(x+h_k,y)-f(x,y)}{h_k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{d}{dx} f(x,y) \,.\ \mu\text{-a.e.}$$

Mit Mittelwertsatz

$$\forall y\in[0,1] \quad |g_k(y)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \underbrace{\sup_{x,y} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|}_{=: C \text{ Majorante}} \overset{\text{Voraussetzung}}{< \infty}$$

Als Limes ist $\frac{d}{dx} f(x,\cdot)$ auf $y\in[0,1]$ Lebesgue-messbar + integrabel auf $[0,1]$

Dominierte Konvergenz / S. 5.21.

$$\Rightarrow \int_0^1 g_k(y)\,dy \xrightarrow{k\to\infty} \int_0^1 \frac{d}{dx} f(x,y)\,dy.$$

Dies gilt $\forall$ Folgen $h_k\to 0$ $\Rightarrow$ $\square$ K. 5.22.

5.3 Absolutstetigkeit des Integrals

Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel.

[schon vorher: $\mu \llcorner \overset{\mathbb{R}^n}{\overset{\subseteq}{B}}$ $\equiv \mu \llcorner \mathbb{1}_B$]

Setze ($f \geq 0$ μ.-a.e)

$$\gamma(A) := \mu \llcorner f(A) := \int_A f \, d\mu$$

$\boxed{Ü}$ [γ zunächst definiert auf Σ_μ ⇝ Caratheodory-Hahn-Erweiterung auf ganz $\mathbb{R}^n$.

Falls $f \geq 0$ μ-a.e., so ist $\mu \llcorner f$ Radon-Maß $\boxed{Ü}$

Außerdem $\mu(A) = 0 \implies \gamma(A) = 0$

$\Sigma_\mu \subseteq \Sigma_\gamma$

In

„$\gamma << \mu$" γ absolut stetig bzgl. μ:

Def. 5.23 μ, γ: Maße auf Ω mit messbaren Mengen $\Sigma_\mu, \Sigma_\gamma$.
Gilt $\Sigma_\mu \subseteq \Sigma_\gamma$ und gilt „$\mu(A) = 0 \implies \gamma(A) = 0$"
so heißt γ ~~bzgl. μ~~ absolut stetig bzgl. μ

$$\boxed{\gamma << \mu}$$

Satz 5.24

Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \underset{A \ \mu\text{-messbar}}{\forall A \subseteq \Omega} \text{ mit } \mu(A) < \delta :$$

$$\int_A |f| \, d\mu < \varepsilon$$

Beweis: Angenommen Beh. falsch:

$$\cancel{\forall} \ \exists \varepsilon > 0 : \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists A_k \subseteq \Omega \ \mu\text{-messbar}$$

$$\mu(A_k) < 2^{-k}, \quad \int_{A_k} |f| \geq \varepsilon \quad \cancel{\forall}.$$

Für $B_\ell := \bigcup_{k=\ell}^{\infty} A_k$ gilt $B_{\ell+1} \subseteq B_\ell \subseteq \ldots \subseteq \Omega$

und $\mu(B_\ell) \leq \sum_{k=\ell}^{\infty} \mu(A_k) \leq 2^{-\ell+1}$

$$\int_{B_\ell} |f| \, d\mu \geq \int_{\Omega} |f| \chi_{A_\ell} \geq \varepsilon \qquad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Setze $A := \bigcap_{\ell=1}^{\infty} B_\ell \overset{\text{Satz 3.11}}{\Longrightarrow} \mu(A) = \lim_{\ell \to \infty} \mu(B_\ell) = 0.$

Weiterhin:

$$g_\ell := |f| \chi_{B_\ell} \xrightarrow{\ell \to \infty} |f| \chi_A \qquad \forall x \in \Omega.$$

$$|g_\ell| \leq |f| \quad \text{in } \Omega \qquad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \int_A |f| \, d\mu = \lim_{\ell \to \infty} \int_\Omega g_\ell \, d\mu = \lim_{\ell \to \infty} \int_{B_\ell} |f| \, d\mu \geq \varepsilon$$

↑ dominierte Konvergenz S.5.21

$$\Rightarrow \int_A |f| \, d\mu > 0 \, , \quad \mu(A) = 0 \quad ↯$$

□ S.5.24.

Satz 5.25 (Abstrakte Version)

Seien $\mu, \nu : 2^X \to [0,\infty]$ Maße, $\nu \ll \mu$, $\nu(X) < \infty$.

Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \Sigma_\mu : \quad \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon.$$

Beweis (Analog zu S. 5.25).

5.4. Satz von Vitali:

Notwendiges und Hinreichendes Konvergenz-Kriterium:

Seien $f_1, f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel, $k \in \mathbb{N}$.

Def. 5.26:

Die Familie $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ hat gleichgradig absolutstetige Integrale, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \cancel{\forall k \in \mathbb{N}} \quad \forall A \subseteq \Omega, \ A \ \mu\text{-messbar:}$$

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f_k| \, d\mu < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

unabhängig von k!

Satz 5.27 (Vitali)

Falls $\mu(\Omega) < \infty$ so sind äquivalent:

i) $f_k \xrightarrow{\mu} f$ und (f_k) hat gleichgradig absolutstetige Integrale

ii) $\lim\limits_{k \to \infty} \int_\Omega |f_k - f| \, d\mu = 0$.

ohne Beweis (~~vgl.~~ siehe Struwe-Skript Satz 3.4.1).

5.5 L^p- Räume

Def. 5.28

Für $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $1 \le p < \infty$ sei
μ-messbar

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \le \infty$$

[vgl. $\|a_n\|_{\ell^p} = \left(\sum |a_n|^p\right.$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} := \mu\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

$$\overset{}{\underset{\uparrow}{=}} \inf \{ C \in [0,\infty] ;\ |f| \le C \quad \mu\text{-a.e.} \} \le \infty$$

" $|f| \le \|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}$ μ-a.e. "

Für $1 \le p \le \infty$ setzen wir

$$\underset{\uparrow}{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu) := \{ f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}},\ f\ \mu\text{-messbar},\ \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} < \infty \}$$

geschwungenes $\mathcal{L}$!

Beispiel 5.29

- $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega,\mu)$ gilt

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \quad \mu.\text{-a.e. } x \in \Omega.$$

~~Bw~~ ⌜ Sei $c_k \in \mathbb{R}$, $c_k \downarrow \|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}$ mit

, $|f| \leq c_k$ μ.-a.e.

d.h. $A_k := \{x \in \Omega : f_k > c_k\}$ μ- Nullmenge.

$\Rightarrow A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ auch μ- Nullmenge.

$\forall x \in \Omega \setminus A$ gilt: $f(x) \leq c_k \ \forall k$

$$\Rightarrow f(x) \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \quad \forall x \in \Omega\setminus A$$

↑ A Nullmenge!

⌞

- $f(x) := \frac{1}{|x|^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Da f Riemann-intbar $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^n$-intbar,

$$\int_{B_1(0)} f^p \, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polarkoordinaten}}}{=} \int_0^1 r^{n-1} r^{-\alpha p} \, dr = \begin{cases} \frac{c_n}{n-\alpha p} & \text{Falls } p < \frac{n}{\alpha} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also $f(x) \in L^p(\Omega, \mathcal{L}^n) \Leftrightarrow 1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$.

Definiere $L^p(\Omega,\mu)$ als normierten Vektorraum

Eine Norm $\|\cdot\|$ muss erfüllen:

Positivität • $\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \geq 0$ ✓ , $\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} = 0 \iff f=0$ ✗ z.B. $f = 1_A$ mit $\mu(A)$

$\Rightarrow \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} = 0$

Homogenität • $\|\lambda f\|_{L^p(\Omega,\mu)} = |\lambda| \, \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ✓

Dreiecks-Ungl. • $\|f+g\|_{L^p(\Omega,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} + \|g\|_{L^p(\Omega,\mu)}$?

Idee: Für $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ setze

$$f \sim g :\iff f = g \quad \mu\text{-a.e.}$$

↑ ab sofort "$f = g$"

und definiere $L^p(\Omega,\mu) := \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)/\sim$

$$\|[f]\|_{L^p(\Omega,\mu)} := \inf_{f \in [f]} \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} .$$

Jedes Element in $L^p(\Omega,\mu)$ ist also eine Klasse $[f]$ von Funktionen $f, g \in [f] \iff f = g \quad \mu$-a.e.

Wir identifizieren $[f] \in L^p(\Omega,\mu)$ mit einem Vertreter f (der also nur bis auf Nullmengen definiert ist).

Satz 5.30

Für $1 \le p \le \infty$ ist der Raum $\left(L^p(\Omega,\mu), \|\cdot\|_{L^p(\Omega,\mu)}\right)$ ein vollständiger, linearer ~~Vek~~ normierter Vektorraum.

alle Cauchy-Folgen konvergieren, d.h.

$\|f_k - f_\ell\|_{L^p(\Omega,\mu)} \xrightarrow{k,\ell} 0 \Rightarrow \exists f \in L^p(\Omega,\mu)$ s.d.
$f_k \to f$ in $L^p(\Omega,\mu)$.

Zunächst: • $\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-a.e. $(\Leftrightarrow [f] = \underset{\sim}{0})$

"$\Leftarrow$" ✓ ($p=\infty$ klar)

"$\Rightarrow$" ~~Ang~~ $\boxed{p<\infty}$ $A_k := \{x \in \Omega : |f|^p > \frac{1}{k}\}$ $k \in \mathbb{N}$

Dann gilt

$$0 = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \ge \int_\Omega |f|^p \chi_{A_k} \, d\mu \ge \frac{1}{k} \int_\Omega \chi_{A_k} \, d\mu = \frac{1}{k} \mu(A_k).$$

(Tschebycheff)

$\forall k$ $\Rightarrow \mu(A_k) = 0$.

Also auch $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$: $\mu(A) = 0$.

Ist $x \notin A \Rightarrow |f(x)|^p \le \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$\Rightarrow f = 0$ $\forall x \notin A$, A Nullmenge //

Hilfsmittel:

Lemma 5.31 (Young'sche Ungleichung)

Sei ~~$0<p$~~ $1 \leq p,q < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

"p, q Hölder-Konjugiert"

Dann gilt $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ $\forall a,b \geq 0$

Beweis:

- $p=2$: $2ab \leq a^2+b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

Betrachte $f(a) := ab - \frac{a^p}{p}$ für ein $b>0$, [$b=0$ klar]

$$\lim_{a\to\infty} f(a) = -\infty \quad (p>1 \, !)$$

$$f(0) = 0, \quad f(a)>0 \text{ für } \underset{a>0,}{a \approx 0}$$

$\Rightarrow$ $f(a)$ nimmt ihr max an in einem Punkt mit $f'(a^*)=0$

$$\Leftrightarrow \quad b - \frac{p\,a^{p-1}}{p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^* = b^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\overset{\|}{f(a)}}{ab-\frac{a^p}{p}} \leq a^* b - \frac{(a^*)^p}{p} = b^{\frac{p}{p-1}}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{b^q}{q} \quad \square$$

Lemma 5.31 (Hölder-Ungleichung)

Sei $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dann gilt $\forall f \in L^p(\Omega, \mu)$ $g \in L^q(\Omega, \mu)$ ist $f \cdot g \in L^1(\Omega, \mu)$ und.

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \|g\|_{L^q(\Omega,\mu)} \quad \forall \begin{array}{l} f \in L^p(\Omega,\mu) \\ g \in L^q(\Omega,\mu) \end{array}$$

Beweis: Fall: $p = 1 \Rightarrow q = \infty$

$$|f| \cdot |g| \leq \|f\|_{L^\infty} |g| \qquad \mu\text{-a.e.}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |f| |g| d\mu \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \|g\|_{L^1(\Omega,\mu)} .$$

$1 < p, q < \infty$.

Angenommen $\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} = \|g\|_{L^q(\Omega,\mu)} = 1$.

$$|f| |g| \overset{\text{Young}}{\leq} \frac{1}{p} |f|^p + \frac{1}{q} |f|^q$$

$$\Rightarrow \underset{\|fg\|_{L^1}}{\underset{\|}{\int_\Omega |f| |g| d\mu}} \leq \frac{1}{p} \int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_\Omega |g|^q d\mu = \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|g\|_{L^q}^q$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_{L^p}$$

Für generelles f, g wähle

$$\bar{f}(x) := \frac{1}{\|f\|_{L^p}} f(x) \quad , \quad \bar{g}(x) = \frac{1}{\|g\|_{L^p}} g(t)$$

$$\Rightarrow 1 \geq \|\bar{f} \bar{g}\|_{L^1} = \frac{1}{\|f\|_{L^p}} \frac{1}{\|g\|_{L^q}} \|f g\|_{L^1}$$

☒

Lemma 5.32 (Hölder-Ungleichung (2))

Sein $1 \leq r, p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $f \in L^p(\Omega, \mu)$
$g \in L^q(\Omega, \mu)$.

. Dann ist $f \cdot g \in L^r(\Omega, \mu)$

und $\|f g\|_{L^r(\Omega,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \|g\|_{L^q(\Omega,\mu)}$

. Ist $\mu(\Omega) < \infty$ ~~und~~, so gilt $L^r(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$
$\forall \quad 1 \leq r \leq s \leq \infty$.