4 Messbare Funktionen

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ μ-messbar, μ Maß.

Def. 4.1 (μ-messbare Funktionen)

$f: \Omega \to [-\infty, \infty] =: \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ heißt μ-messbar, falls

i) $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$ sind μ-messbar

ii) $f^{-1}(U)$ ist messbar für jedes offene $U \subseteq \mathbb{R}$

Bemerkung 4.2:

Äquivalent zu (ii)

(iii) $f^{-1}(B)$ ist μ-messbar für jede Borel-Menge $B \subseteq \mathbb{R}$

(iv) $f^{-1}([-\infty, a))$ μ-messbar $\forall a \in \mathbb{R}$

Bew. (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\mathcal{G} = f^{-1}(\mathcal{B})$ ist σ-Algebra, die alle Urbilder offener Mengen enthält.

Borel-σ-Algebra von $\mathbb{R}$

(iv) $\Rightarrow$ (iii) $[-\infty, a)$ erzeugt die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Falls für $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ die {Topologie der offenen Mengen in $\mathbb{R}$}
$\cup$ {von $[-\infty, a)$, $(a, \infty]$ erzeugte Topologie},

"Umgebungen von $\pm\infty$",

so ist $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar

$\Leftrightarrow$ (v) $f^{-1}(U)$ μ-messbar $\forall$ offene $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

(vi) $f^{-1}([-\infty, a))$ ist μ-messbar $\forall a \in \mathbb{R}$

Beweis (vi) $\Rightarrow$ (i) $\wedge$ (iv)

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} f^{-1}([-\infty,k])$$

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \Omega \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{-1}([-\infty,k))$$

$$f^{-1}((-\infty,a)) = f^{-1}([-\infty,a)) \setminus f^{-1}(\{-\infty\})$$

Satz 4.3

i) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-messbar, $g \overset{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{\text{stetig}} \Rightarrow g\circ f$ μ-messbar

ii) $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-messbar

$\Rightarrow f+g$ ~~μ-messbar~~, $f\cdot g$, $|f|$, $f\wedge g = \min\{f,g\}$

$f \vee g = \max\{f,g\}$ μ-messbar.

ist $g(x)\neq 0$ $\forall x$, so auch $\frac{f}{g}$ μ-messbar

iii) $f_k : \Omega \to [-\infty,\infty] = \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar, $k\in\mathbb{N}$. Dann auch

$\inf_k f_k$, $\sup_k f_k$, $\liminf_{k\to\infty} f_k$, $\limsup_{k\to\infty} f_k$ ebenfalls μ-messbar

Beweis (i) g^{-1} bildet offene Mengen auf offene Mengen ab,

$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(\cdot))$.

(ii)

- $(f+g)^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q} \\ r+s<a}} f^{-1}([-\infty, r)) \cap g^{-1}([-\infty, s)).$

$\boxed{(f+g)(x) < a} \iff f(x) < r$ & $g(x) < s$ für ein $r, s \in \mathbb{Q}, r+s<a$

- Die Fkt. $s \mapsto s^2$, $s \mapsto -s$, $s \mapsto \frac{s}{2}$ sind stetig

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$$ als μ-messbar

- $$\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}([-\infty, a)) = \begin{cases} g^{-1}((\frac{1}{a}, 0]) , & a<0 \\ g^{-1}([-\infty, 0)) , & a=0 \\ g^{-1}([-\infty, 0] \cup (\frac{1}{a}, \infty)) & a>0 \end{cases}$$

- $s^+ := \max\{s, 0\}$, $s^- := \min\{-s, 0\} = (-s)^+$ stetige Abb.

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} |f| &= f^+ + f^- \\ f \wedge g &= f - (g-f)^- \\ f \vee g &= f + (g-f)^+ \end{aligned}$$ μ - messbar.

(iii) $(f_n)_{n=1}^{\infty} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ alle μ-messbar.

$$\left(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-\infty, a))$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\inf_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$$

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\left(\inf_{n\geq \ell} f_n\right) \quad \Rightarrow \mu\text{-messbar.}$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = -\liminf_{n\to\infty}(-f_n)$$

$\square$ S.4.3

μ-messbare Fkt. sind durch "Treppenfkt." approximierbar:

Satz 4.4.

Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$, Dann $\exists$ μ-messbare Mengen $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \Omega$

so dass $f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$ $\leftarrow$ monotone Konvergenz!

Notation: $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Beweis

$$A_1 := \{x \in \Omega : f(x) \geq 1\} = f^{-1}([1,\infty])$$

A_1 μ-messbar. $(\rightsquigarrow f \geq \chi_{A_1}$ auf $A_1)$

$$A_k := \{x \in \Omega ,\ f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}\}$$

Es gilt: Beh: $f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x)$ $\forall x \in \Omega$.

- 1. Falls ∞ viele A_k's mit $x \in A_k$ $\Rightarrow$

$\exists$ TF $k_i \to \infty$ $\forall k_i$: $f(x) \geq \frac{1}{k_i} + \sum_{j=1}^{k_i-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x)$

$$\geq \sum_{j=1}^{k_i-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x) \xrightarrow{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x)$$

- 2. Falls endlich viele A_k's mit $x \in A_k$

$k_0 := \max\{k : x \in A_k\}$. oder $x \notin A_k$ $\forall k \in \{0, \ldots$

Falls k_0 $\exists$: $x \in A_{k_0} \Rightarrow$ $f(x) \geq \frac{1}{k_0} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x)$

$$\underset{\chi_{A_{k_0}}(x)=1}{=} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x) \underset{\chi_{A_l}=0\ \forall\ l>k_0}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x).$$

Falls $x \notin A_k$ $\forall k$: $f(x) < \frac{1}{k} + \overbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x)}^{=0} = \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$

Also $\boxed{f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x)}$ $\forall x \in \Omega$.

Zeige noch

$$f(x) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x).$$

- Falls $f(x) = \infty \Rightarrow x \in A_k \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty = f(x)$

- Falls $f(x) = 0$ $\quad x \notin A_k \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) = 0 = f(x)$

- $0 < f(x) < \infty$. Dann $x \notin A_k$ für ∞- viele k's. ~~Kann x nicht zu ∞- vielen A_k's gehören~~

da sonst

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{oben gezeigt}}}{f(x) \ge} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \in \bigcap_{k \ge k_0} A_k}}{=} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

$\exists$ Folge $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ $\quad x \notin A_{k_i} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$

Def

$$f(x) < \frac{1}{k_i} + \sum_{j=1}^{k_i - 1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach "}\ge\text{"- Rechnung!}}}{0 \le} f(x) - \sum_{j=1}^{k_i-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) < \frac{1}{k_i} \xrightarrow{i \to \infty} 0$$

$\square$

Bemerkung:

- $f_k := \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{A_j} \xrightarrow{k \to \infty} f$ punktweise, monoton.

- Gilt $\sup_X |f(x)| < \infty \Rightarrow \sup_X |f_k - f| \xrightarrow{k\to\infty} 0$

- Wende diesen Satz auf f^+, f^- an

  $\rightsquigarrow$ Jede μ-messbare Fkt. ist approximierbar durch Treppenfunktionen.

~~Satz~~ Def. 4.5

Wir sagen, dass eine Aussage $A(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$, (μ-fast überall / μ-a.e. / μ-almost everywhere) gilt

Falls

$$\mu(\underbrace{\{x \in \Omega : A(x) \text{ gilt nicht}\}}) = 0.$$

Nullmenge.

$$\boxed{\Longleftrightarrow \exists N \subseteq \Omega, \mu(N) = 0 \text{ s.d. } A(x) \text{ wahr } \forall x \in \Omega \setminus N}$$

Beispiel: 4.6.:

- $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ erfüllt $\mathcal{L}^1$-a.e. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0$.

- Ist f μ-messbar und $f(x) = g(x)$ fast alle x, so ist auch g μ-messbar

Def. 4.7.

$F = F(x,y) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt <u>Caratheodory-Fkt</u>

falls

i) $\forall y \in \mathbb{R}$: $F(\cdot, y)$ μ-messbar

ii) μ-f.a. $x \in \Omega$: $F(x, \cdot)$ stetig.

[$\exists N \in \Omega$ s.d. $F(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig $\forall x \in \Omega \setminus N$.]
$\mu(N) = 0$

Beispiel 4.8.

ist $u : \Omega \to \mathbb{R}^*$ μ-messbar,

F Caratheodory-Fkt,

So gilt $f(x) := F(x, u(x))$ ist μ-messbar.

Beweis: OBdA: $F(x, \cdot)$ ~~überall stetig~~. stetig $\forall x$

[Sonst $\tilde{F}(x, y) := \begin{cases} F(x,y) & \text{falls } x: F(x,\cdot) \text{ stetig} \\ 0 & \text{falls } x: F(x,\cdot) \text{ nicht stetig.} \end{cases}$

$\forall y: \Rightarrow F(x,y) = \tilde{F}(x,y)$ μ-fast alle $x \in \Omega$.

$\Rightarrow F(x, u(x)) = \tilde{F}(x, u(x))$ für μ-fast alle $x \in \Omega$

$\overset{\text{Bsp. 4.6.}}{\Rightarrow}$ $F(x, u(x))$ μ-messbar $\Leftrightarrow$ $\tilde{F}(x, u(x))$ μ-messbar.
]

Bew: Es reicht zu zeigen: $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\{x : f(x) \leq a\} = \{x : F(x, u(x)) \leq a\} = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} \left(\{x : F(x,y) < a + \tfrac{1}{l}\} \cap \{x ; |u(x) - y| < \tfrac{1}{k}\} \right)}$$

"$\subseteq$" Sei $x \in f^{-1}((-\infty, a])$.

Zu $l \in \mathbb{N}$ $\exists$ $k_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\cancel{B_{\frac{1}{k_0}}(u(x)) \subseteq F(x, \cdot)^{-1}((-\infty, a + \tfrac{1}{l}))}$$

d.h. $\forall y \in B_{\frac{1}{k_0}}(u(x))$: $F(x,y) < a + \frac{1}{l}$. ← Stetigkeit in y.

also $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists$ $y \in B_{\frac{1}{k}}(u(x)) \cancel{\cap \mathbb{Q}}$

$\boxed{y \in \mathbb{Q}}$ s.d.

$F(x, y) < a + \frac{1}{l}$.

$\Rightarrow$ $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} \{x : F(x,y) < a + \frac{1}{l}\} \cap \{x : |u(x) - y| < \frac{1}{k}$

Dies gilt $\forall l \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$ "$\subseteq$" ✓

"$\geq$". Sei $x \in \bigcap_l \bigcap_k \bigcup_Q \ldots$ Ausdruck.

$\vdots$

$\forall l \in \mathbb{N} \quad \exists$ Folge $(y_k^l)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq Q$

mit $F(x, y_k^l) < a + \frac{1}{l}$

& $|u(x) - y_k^l| < \frac{1}{k}$

$\overset{\lim\limits_{k\to\infty}}{\Longrightarrow}$ $y_k^l \longrightarrow u(x)$ also

$\boxed{(F \text{ stetig in } y\text{-Variable})}$ $F(x, u(x)) \leq a + \frac{1}{l} \quad \forall l \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{l \to \infty}$ $F(x, u(x)) \leq a$

$\Rightarrow$ ~~$x \in$~~ $\emptyset$. $f(x) \leq a$

$\square$ Bsp.

Wann sind Funktionen messbar?

Beispiel 4.9 Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}$ stetig & μ Borelsch.

Dann ist f μ-messbar.

Beweis $f^{-1}(\{\pm\infty\}) = \emptyset \rightsquigarrow \mu$-messbar.

U offen $\underset{\text{Stetigkeit}}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(U)$ offen $\underset{\mu \text{ Borelsch}}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(U)$ μ-messbar.

Beispiel 4.10 $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$

Eine Fkt. heißt <u>oberhalb stetig (upper semi-continuous)</u>,

falls $\cancel{\limsup_{x \to x_0}}\ f(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} f(x)$ $\forall x_0$

<u>unterhalb stetig (lower-semicont.)</u>

$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x)$. $\forall x_0$

oberhalb stetig

$\iff$ $f^{-1}([a,\infty])$ abgeschlossen $\forall a \in \mathbb{R}$

$\iff$ $f^{-1}([-\infty, a))$ ~~ist~~ relativ offen bzgl. Ω $\forall a \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ f ist μ messbar, Falls

- f oberhalb/unterhalb stetig.
- μ Borelsch.

4.2 Sätze von Lusin / Egoroff

- μ immer Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar, $\mu(\Omega) < \infty$

Satz 4.11 (Egoroff)

Seien $f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar, $k \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar

und μ-a.e. x: $|f(x)| < \infty$.

Es gelte $f_k(x) \longrightarrow f(x)$ μ-a.e. $x \in \Omega$.

Dann $\forall\, \delta > 0$ $\exists\, F \subset \Omega$, F kompakt, $\mu(\Omega \setminus F) < \delta$

& $\sup_{x \in F} |f_k(x) - f(x)| \to 0$ f. $k \to \infty$

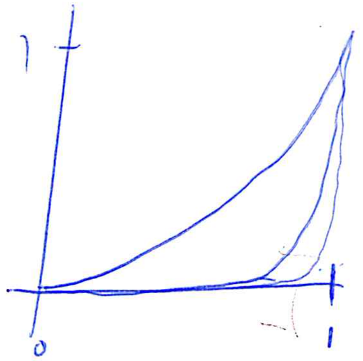
in F konvergiert $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f.

Beispiel 4.12

- $f_n(t) = t^n$ auf $[0,1]$

Wir wissen aus Infini 1: $f_n \longrightarrow \begin{cases} 0 & t<1 \\ 1 & t=1 \end{cases}$

punktweise, aber nicht gleichmäßig.



- Aber auf jedem Kompaktum $[0,a]$, $a<1$ gleichmäßig.
- Aber "$\delta=0$" im Satz von Egoroff geht nicht.

- $\mu(\Omega)<\infty$ ist notwendig: $\mu = \mathcal{L}^n$

$$f_n(x) = \chi_{B_n(0)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_n(0) \\ 0 & x \notin B_n(0) \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \ \mathcal{L}^n\text{-a.e.}$$

$$f \equiv 1$$

aber kein Kompaktum F mit $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus F) < \infty$.

Beweis Satz 4.11:

Sei $\delta > 0$ gegeben. Für $i, j \in \mathbb{N}$:

$$C_{ij} := \bigcup_{k=j}^{\infty} \{x \in \Omega : |f_k(x) - f(x)| > 2^{-i}\}$$

Es gilt $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{ij}\right) = \cancel{\emptyset}\, 0 \Leftarrow$ a.e. $x \in \Omega$ $|f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$

. $C_{i(j+1)} \subseteq C_{i,j} \quad \forall j.$

. $C_{i,j}$ μ - messbar (f, f_k μ - messbar) $\Rightarrow |f - f_k|$ μ - messbar

Satz 3.11 $\Leftarrow \mu(C_{ij}) \leq \mu(\Omega) < \infty$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} \mu(C_{ij}) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{ij}\right) = 0.$$

$\Rightarrow \forall \delta > 0\ \forall i \quad \exists\ N(i)$ mit

$$\mu(C_{i,N(i)}) < \delta\, 2^{-i-1}.$$

Setze $A := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{i,N(i)}$. Dann gilt

$$\mu(\Omega \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_{i,N(i)}) < \frac{\delta}{2},$$

$$\forall i \in \mathbb{N}: \quad \sup_{x \in A} |f_k(x) - f(x)| \leq 2^{-i} \quad \forall k \geq N(i).$$

A ist aber nicht kompakt. (aber messbar)

Wähle mit Satz 3.44. $\underline{F \subseteq A}$ kompakt mit

$$\mu(F) \geq \mu(A) + \frac{\delta}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \mu(\Omega \setminus F) \overset{\Omega, A, F \ \mu\text{-messbar}}{=} \mu(\Omega \setminus A) + \mu(A \setminus F)$$

$$< \delta .$$

$\square$ 14.11.

<u>Satz 4.12</u> (Lusin)

Sei $F: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar, $|F| < \infty$ μ-a.e.

Dann $\forall \delta > 0 \ \exists F \subseteq \Omega$, F kompakt, $\mu(\Omega \setminus F) < \delta$ &

$$f|_F : F \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig.}$$

<u>Beispiel 4.13</u> Achtung: $f := \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist nirgends stetig als Funktion auf $[0,1]$.

Aber f stetig als Funktion auf $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

[f stetig auf X $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\forall \ |x-y| < \delta, \ x, y \in X$

Beweis S. 4.12

(i) Sei zunächst g eine Treppen-Funktion:

irgendwelche disjunkten Mengen!

$$g := \sum_{i=1}^{I} b_i \mathbb{1}_{B_i}, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^{I} B_i, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

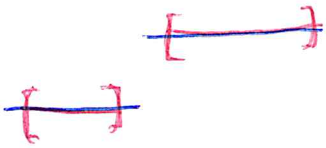
messbar!

Zu $\delta > 0$, $i \in \{1, \dots, I\}$ $\exists\ F_i \subseteq B_i$ kompakt, $\mu(B_i \setminus F_i) < \delta 2^{-i}$ $\Leftarrow$ Satz 3.4

$\rightsquigarrow$ $(F_i)_{i=1}^{I}$ disjunkt & kompakt $\Rightarrow$ $\operatorname{dist}(F_i, F_j) > 0$ $\forall i \neq j$.

$\Rightarrow$ g lokal konstant auf $\bigcup_{i=1}^{I} F_i =: F$

$\Rightarrow$ stetig



$$\mu(\Omega \setminus F) = \mu\Big(\bigcup_i B_i \setminus \bigcup_l F_l\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_i (B_i \setminus F_i)\Big) \leq \delta.$$

(ii) Für f messbar $\exists f_k$ Treppenfunktionen nach Satz 4.4. mit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

$$f_n(x) = +\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{A_j} = \sum_{i=1}^{I_k} b_{ik} \chi_{B_{ik}}$$

$$\uparrow f^+ \qquad \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{\tilde{A}_j} \quad \uparrow f^+$$

disjunkt, $\bigcup_{i=1}^{I_k} B_{ik} = \Omega.$

Gemäß i) $\exists F_k \subseteq \Omega$ mit F_k kompakt.

$$\mu(\Omega \setminus F_k) < \delta 2^{-k-1}, \quad f_k\big|_{F_k} : F_k \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Setze außerdem $F_0 \subseteq \Omega$ kompakt nach Satz 4.11 (Egoroff)

$$\mu(F_0) < \frac{\delta}{2}, \quad \sup_{x\in F_0} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

$F := \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k \subseteq \Omega$:
- F kompakt
- $\mu(\Omega \setminus F) < \delta$
- $\sup_{x\in F \cap F_0} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$

glm stetig auf $F \subseteq F_k$

$\Rightarrow f$ glm. stetig auf F. $\square$ S.4.

4.3. Maß-Konvergenz

μ beliebiges Maß auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar

f, f_n μ-messbar, $|f| < \infty$ μ-a.e.

Def. 4.13 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f in Maß μ

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad \text{für } n \to \infty$$

$:\Longleftrightarrow$

$$\forall \delta > 0 : \quad \mu(\{x \in \Omega : |f(x) - f_n(x)| \geq \delta\}) \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Satz 4.14 (μ-a.e. Konvergenz $\Rightarrow$ Maß-Konvergenz)

Sei $\mu(\Omega) < \infty$.

Falls $f_n \longrightarrow f$ μ-a.e., so gilt $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Beweis: Wir argumentieren wie beim Satz von Egoroff, S. 4.11:

$$C_j := \bigcup_{n=j}^{\infty} \{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \quad , j \in \mathbb{N},$$

μ-messbar.

$$\left.C_{j+1} \subseteq C_j \,, \quad \mu(C_1) < \mu(\Omega) < \infty \right\} \overset{S.3.11}{\Longrightarrow} \mu(C_j) \longrightarrow \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j\Big) = 0.$$

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j\Big) = 0.$$

~~$\mu(\dots) = 0$~~

Beispiel 4.15 (Umkehrung von Satz 4.14 falsch!)

~~$\Omega \in \mathbb{R}$~~ $\Omega = [0,1]$, $\mu = \mathcal{L}^1$.

$$f_k := \chi_{\left[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k+1-2^n}{2^n}\right)} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ immer von k abhängig, s.d.

$$2^n \le k < 2^{n+1}.$$

Es gilt $\mu(\{x \in \Omega \mid |f_k(x)| > 0\}) = \frac{1}{2^n} = \frac{2}{k} \to 0 \quad (k \to \infty).$

$$\Rightarrow f_k \xrightarrow{\mu} 0 \quad (k \to \infty).$$

Gauß-Klammer/„abrunden"
$[s] = \sup\{n \in \mathbb{N}_0, n \le$

Andererseits $x \in [0,1)$: $f_k(x) = \begin{cases} 1 & k = [2^n x] + 2^n \\ 0 & \text{sonst}, k \in \{2^n, \dots, 2^{n+1}-1\} \end{cases}$

$\Rightarrow f_k$ konvergiert nirgendwo

Satz 4.16 Sei $f_n \xrightarrow{\mu} f$. $\mu(\Omega) < \infty$

Dann $\exists$ Teilfolge $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ s.d. $f_{k_i} \longrightarrow f$ μ. a.e.

Beweis $k, l \in \mathbb{N}$

setze $A_{k,l} := \{x \in \Omega : |f_l(x) - f(x)| > 2^{-k}\}$

Es gilt $\mu(A_{k,l}) \xrightarrow{l \to \infty} 0$ Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \exists\, \ell(k) \in \mathbb{N}$. s.d.

$$\mu(A_{k,\ell(k)}) < 2^{-k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{\text{Beh: } f_{\ell(k)} \longrightarrow f \ \ \mu\text{-a.e.}}$

Setze $B_j := \bigcup_{k \geq j} A_{k,\ell(k)}$

mit $\boxed{(*)\ \mu(B_j) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \mu(A_{k,\ell(k)}) \leq 2^{-j}}$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

$\cancel{\mu}(\bigcap_{l=1}^{\infty}$ $B_{j+1} \subseteq B_j$. $\forall l \in \mathbb{N}$

$\mu(B_1) < \infty$.

$\overset{\text{S. 3.11}}{\Rightarrow} \lim_{j \to \infty} \mu(B_j) = \mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j) \in \mathcal{A}$

$\quad \| $

$\quad 0$

$x \notin \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \Rightarrow \exists\, j$ s.d. $x \notin B_j = \bigcup_{k \geq j} A_{k,\ell(k)}$

$\Rightarrow x \notin A_{k,\ell(k)}\ \forall k \geq j \Rightarrow |f_{\ell(k)}(x) - f(x)| \leq 2$ $\square$