3.5. Radon-Maße

Sei μ immer ein Maß auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.42

Das Maß μ heißt Radon-Maß,

Falls
- μ Borel-regulär
- $\mu(K) < \infty$ $\forall$ kompakte Menge K.

Beispiel 3.43

i) $\mathcal{L}^n$ ist Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

ii) $\mathcal{H}^s$ für $s<n$ ist kein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

Ü

iii) Ist μ Radon-Maß, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ μ-messbar,

$$(\mu \llcorner A)(B) := \mu(A \cap B)$$

restringiert auf A / "restricted to A"

ein Radon-Maß.

Zu iii)

$\gamma := \mu \llcorner A$ ist Maß und $\mu \llcorner A(K) < \infty$ $\forall K$ kompakt
$\leadsto$ $\boxed{\text{Übung}}$.

noch zu zeigen: · γ ist Borel-regulär!

- zunächst zeige γ Borelsch. Sei also $C \subseteq \mathbb{R}^n$ borelsche Menge

$\Rightarrow$ C μ-messbar ~~$\Rightarrow$ $C \cap A$ μ-messbar.~~ ~~A μ-messbar~~

$\Rightarrow$ $\forall B \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig

C μ-messbar

$$\gamma(B) = \mu(B \cap A) \overset{\swarrow}{=} \mu(B \cap A \cap C) + \mu((B \cap A) \setminus C)$$
$$= \mu((B \cap C) \cap A) + \mu((B \setminus C) \cap A)$$
$$= \gamma(B \cap C) + \gamma(B \setminus C)$$

$\Rightarrow$ C ist γ-messbar! $\Rightarrow$ γ Borelsch.

- γ Borel-regulär

Finde also zu beliebigem $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein borelsches $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \supseteq C$ & $\gamma(B) = \gamma(C)$.

- Zu $A \cap C$ Finde borel-$D \supseteq A \cap C$, $\mu(D) = \mu(A \cap C)$
- $C \setminus A$ Borelsches $E \supseteq C \setminus A$, $\mu(E) = \mu(C \setminus A)$.

Es gilt:

A messbar

- $\cancel{\emptyset \le \mu(D \setminus A) = \mu(D) - \mu(D \cap A) = \mu(A \cap C) - \mu(D \cap C) \overset{D \supseteq A \cap C}{\le} 0}$

$\cancel{\Rightarrow \mu(D \setminus A) = 0.}$

A messbar

- $0 \le \mu(E \cap A) = \mu(E) - \mu(E \setminus A) = \mu(C \setminus A) - \mu(E \setminus A) \overset{E \supseteq C \setminus A}{\le} 0.$

$\Rightarrow \mu(E \cap A) = 0.$

Setze

$B := E \cup D$ borelsch, $B \supseteq C$, und

$$\gamma(B) = \mu(B \cap A) \leq \mu(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{E \cap A}) + \mu(D \cap A)$$

$$\leq \mu(D) = \mu(A \cap C) = \gamma(C).$$

$\gamma(B) \geq \gamma(C) \Rightarrow$ $\gamma(B) = \gamma(C)$ $\Rightarrow$ γ Borelsch.

$\square$ Bsp. 3.43

Es gilt ein Analogon zu ~~Satz~~ Korollar 3.25:

Satz 3.44

Sei μ Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

i) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu(A) = \inf_{\substack{A \subseteq G, \\ G \text{ offen}}} \mu(G)$$

ii) $\forall$ messbare $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu(A) = \sup_{\substack{F \subseteq A \\ F \text{ kompakt}}} \mu(F)$$

Für den Beweis brauchen wir:

Lemma 3.45 Sei μ Radon-Maß.

Für jede Borel-Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists G \supseteq B, \ G \text{ offen}, \ \mu(G \setminus B) \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Beweis L. 3.45:

Setze $\mathcal{G} := \{ B \subseteq \mathbb{R}^n : (*) \text{ gilt für } B \}$.

Zeige, dass $\mathcal{G}$ die Borel-σ-Algebra ~~ein~~ enthält.

i) $\forall G \subseteq \mathbb{R}^n$, G offen: $G \in \mathcal{G}$.

ii) Seien $(B_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}$. Wir zeigen $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subseteq \mathcal{G}$:

Zu jedem $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ finden wir $G_k \supseteq B_k$, G_k offen & $\mu(G_k \setminus B_k) \leq \varepsilon 2^{-k}$.

da B_k $(*)$ erfüllt:

Setze $G := \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ offen, $G \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$,

Mit $G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(G_k \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus B_k)$

gilt

$$\mu\left(G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k \setminus B_k) \leq \varepsilon.$$

iii) Sei $B_k \in \mathcal{G}$, Zeige $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{G}$.

OBdA sei $\mu(B_1) < \infty$

[(sonst betrachte $\mu(B_i \cap Q_\ell) < \infty$
$\uparrow$
Würfel, die Raum disjunkt ausschöpf.
$\bigcup_\ell Q_\ell = \mathbb{R}^n$
($\Leftarrow$ μ Radon-Maß)

Wähle $G_k \supseteq B_k$ s.d. $\overset{\text{offen}}{\downarrow} G_k \supseteq B_k$,

$\mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon 2^{-k}$.

Sei $G^K := \bigcap_{k=1}^{K} G_k$.

G^K offen, $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \subseteq G^K$ und

$$\mu(G^K) \le \mu(G^1) \le \mu(B_1) + 1 \underline{\underline{< \infty}}$$

Mit Satz 3.11 iii) (G^K & B_k messbar wegen Offenheit / wegen ⊛)

$$\lim_{K\to\infty} \mu\Big(G^K \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \mu\Big(\bigcap_{K=1}^{\infty} G^K \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\Big)$$

$$= \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\Big)$$

$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$
$\Rightarrow \exists \ell$ mit $x \notin B_\ell$
$\Rightarrow x \in G_\ell \setminus B_\ell$

$$\le \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus B_k)\Big)$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon \quad //$$

(iv) Insbesondere enthält $\mathcal{G}$ jede abgeschlossene Menge F,

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \quad , \text{ wobei } F_n = \{x : \mathrm{dist}(x,F) < \tfrac{1}{n}\}$$

<u>offen</u>.

(v). Sei $\mathcal{F} = \{ B \in \mathcal{G} \text{ s.d. } B^c \in \mathcal{G}\}$.

$\Rightarrow$ • alle offenen Mengen $G \in \mathcal{F}$.

- $B \in \mathcal{F} \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}$.

- Ist $(B_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underset{\mathcal{G}}{\underset{\wedge}{B_n^c}} \overset{(iii)}{\in} \mathcal{G}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \overset{(ii)}{\in} \mathcal{G}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}.$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ ist σ-Algebra ($X, \emptyset \in \mathcal{F}$, da X offen).

$\mathcal{F}$ enthält alle offenen Mengen

$\Rightarrow$ $\underset{\text{Borel-}\sigma\text{-Algebra}}{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$

$\square$ L. 3.45

Beweis von Satz 3.44

(i) zu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\exists$ B Borelsch, $B \supseteq A$, $\mu(A) = \mu(B)$ ($\Leftarrow$ μ Borel $\Uparrow$ μ Radon)

Für jedes offene $G \supseteq B$ gilt nun

$$\mu(A) = \mu(B) = \mu(G) - \mu(G \setminus B).$$

Mit Lemma 3.45: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G^\varepsilon$ s.d. $\mu(G^\varepsilon \setminus B) < \varepsilon$

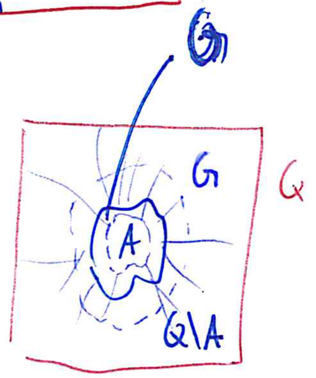
$$\Rightarrow \quad \mu(A) \in (\mu(G^\varepsilon) - \varepsilon, \mu(G^\varepsilon)).$$

$$\Rightarrow \quad \mu(A) = \inf_{\substack{G \supseteq A \\ G \text{ offen}}} \mu(G).$$

//(i)

(ii) Sei A messbar. OBdA ~~$\mu(A)$~~ $A \subseteq \bar{A} \subset Q$ für einen offenen Würfel $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. (sonst $A \cap Q_e$ betrachten, wie oben)

Mit (i)
$$\boxed{\mu(Q \setminus A) = \inf_{\substack{G \supseteq Q \setminus A \\ G \text{ offen}}} \mu(G) = \inf_{\substack{Q \supseteq G \supseteq Q \setminus A \\ G \text{ offen}}} \mu(G).}$$



Sei G offen, $Q \setminus A \subseteq G \subseteq Q$

$$\Rightarrow \quad F := Q \setminus G \subseteq A \text{ kompakt}$$

Andererseits F kompakt, $F \subseteq A$: $G := Q \setminus F$ offen, $Q \setminus A \subseteq G$.

Also:

$$\mu(Q \setminus A) = \inf_{\substack{F \subseteq A \\ F \text{ kompakt}}} \mu(Q \setminus F)$$

// A μ-messbar

$$\underbrace{\mu(Q)}_{<\infty} - \mu(A)$$

$\|$ F is μ-messbar

$$\underbrace{\mu(Q)}_{<\infty} - \mu(F)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(A) = \sup_{\substack{F \subseteq A \\ F \text{ kompakt}}} \mu(F)$$

$\square$ S. 3.44.

Satz 3.46

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Es ist äquivalent für jedes Radon-Maß μ.

i) A μ-messbar

ii) $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus N$ für G_k offen, $\mu(N) = 0$

iii) $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup N$ Für F_k abgeschlossen, $\mu(N) = 0$.

Beweis:

ii) $\Rightarrow$ i) N ist messbar, da Nullmenge (S. 3.13)

iii) $\Rightarrow$ i) G_k, F_k messbar //

~~(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) De Morgan-regeln.~~

i) $\Rightarrow$ ii) Sei A messbar, OE $\mu(A) < \infty$ (sonst $A \cap Q_\ell$ wie oben)

Mit Satz 3.44 G_k offen, $G_k \supseteq A$ &

$$\mu(G_k) \le \mu(A) + \tfrac{1}{k}.$$

$$N := \bigcap_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus A) \Rightarrow A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus N$$

Es gilt $\mu(N) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right) - \mu(A) \le \mu(G_\ell) - \mu(A) \le \frac{1}{\ell} \xrightarrow{\ell \to \infty} 0$

A messbar
$\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ messbar
N messbar

$\Rightarrow \mu(N) = 0$ //

i) ⇒ iii) : Ist A messbar, so auch A^c

ii) auf A^c angewandt ist iii) auf A. //

$\square$ S.3.46

<u>Satz 3.47</u> μ Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Es sind äquivalent:

i) A μ-messbar

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G \supseteq A$, G offen & $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$.

<u>Beweis</u> $\boxed{\ddot{U}}$ Wie Satz 3.28

wobei man Satz 3.44 statt Korollar 3.25 verwendet