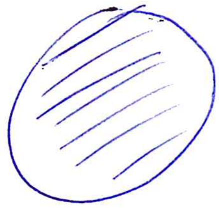
3.4 Das Hausdorff-Maß

Für $s \geq 0$, $\delta > 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ setze

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} r_k^s \;;\; A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k) \;,\; r_k < \delta \right\}$$

Idee:

Länge L



Fläche A

Zum überdecken ~~bemo~~ mit $B_\delta(x_k)$ - Bällen, ~~$r_k < \delta$~~ benötigen wir

$\sim \frac{L}{2\delta}$ viele Bälle

$\frac{L}{2} \xleftarrow{\delta \to 0} \mathcal{H}^1_\delta(\text{—}) \sim \frac{L}{2\delta}\delta \sim \frac{L}{2}$

$0 \xleftarrow{\delta \to 0} \mathcal{H}^2_\delta(\text{—}) \sim \frac{L}{2\delta}\delta^2 \sim \frac{L}{2}\delta$

$\sim \frac{A}{\pi\delta^2}$ viele Bälle

$\mathcal{H}^1_\delta(\oslash) \sim \frac{A}{\pi\delta^2}\delta \sim \frac{A}{\pi\delta} \xrightarrow{\delta \to 0} \infty$

$\mathcal{H}^2_\delta(\oslash) \sim \frac{A}{\pi\delta^2}\delta^2 \sim \frac{A}{\pi} \xrightarrow{\delta \to 0} \frac{A}{\pi}$

Beobachtung:

- $\mathcal{H}^s_\delta$ ist ein Maß auf $\mathbb{R}^n$, da

$$K := \{ B_r(x), \quad r \in (0,\delta), \, x \in \mathbb{R}^n \}$$

Überdeckungsklasse

und $\lambda(B_r(x)) := r^s \quad \in [0,\infty]$

vgl. Satz 3.16.

- $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \leq \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$ für $\delta_1 \geq \delta_2$.

Also $\exists$ der Limes:

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Def. 3.33

$\mathcal{H}^s$ heißt das s-dimensionale Hausdorff-Maß.

$\mathcal{H}^0(A) := \# A.$

Satz 3.34 Für $s \geq 0$ ist $\mathcal{H}^s$ ein ~~Borel-regulär~~ Maß auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis: $s=0$ ✓ Sei also nun $s>0$.

- $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$. ✓
- Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Für $\delta > 0$:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \underset{\mathcal{H}^s_\delta \text{ Maß}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \underset{\text{Def. } \mathcal{H}^s}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k).$$

Mit $\delta \to 0$ (oder $\sup_\delta$) $\Rightarrow$

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k).$$

//

$\boxed{\mathcal{H}^s \text{ ist Maß}}$.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{H}^s$ sogar Borel-regulär ist benötigen wir:

Def. 3.35 (metrische Maße)

Ein Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **metrisch**, falls $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

mit
$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf \{ |a-b| \, ; \, a \in A, b \in B \} > 0$$

gilt
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Satz 3.36 ((Caratheodory-Kriterium für Borel-Maße):

Jedes metrische Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist Borelsch.

Beweis: Es reicht zu zeigen: Jedes abgeschlossene $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ist μ-Messbar.

Sei F abgeschlossen, $B \subseteq \mathbb{R}^n$.

Zeige: $\mu(B) \geq \mu(B \cap F) + \mu(B \setminus F)$.

OBdA: $\mu(B) < \infty$.

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$F_k := \{ x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, F) \leq \tfrac{1}{k} \}.$$

Es gilt ~~(μ metrisch!)~~ $\operatorname{dist}(B \setminus F_k, B \cap F) \geq \frac{1}{k} > 0$, also ($\mu$ metrisch)

$$\mu(B\cap F) + \mu(B\setminus F_k) = \mu\left((B\cap F)\cup(B\setminus F_k)\right) \leq \mu(B).$$

Zeige also noch: Beh. 1. $\boxed{\mu(B\setminus F_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mu(B\setminus F).}$

Beweis der Beh. 1.:

$$R_k := (F_k \setminus F_{k+1}) \cap B. \quad \leftarrow \text{disjunkt}$$

wir: F abgeschlossen

$\bigcup_{l=k}^{\infty} F_l \setminus F_{l+1} = F_k \setminus F$

$$\text{Ich } B\setminus F = \left(B\setminus (F_k)\right) \cup \underbrace{\bigcup_{l=k}^{\infty} R_l}_{(F_k\setminus F)\cap B} \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Also $\mu(B\setminus F_k) \leq \mu(B\setminus F) \leq \mu(B\setminus F_k) + \sum_{l=k}^{\infty} \mu(R_l).$

Beh. 1 folgt dann mit Beh. 2. // Beh. 1.

Beh. 2. $\sum_{l=1}^{\infty} \mu(R_l) < \infty.$

Bew. von Beh. 2: $\quad \operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0 \quad \forall j \geq i+2$

also $\sum_{k=1}^{m} \mu(R_{2k}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k}\right) \leq \mu(B)$

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(R_{2k+1}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k+1}\right) \leq \mu(B).$$

$$\Rightarrow \sum_{k}^{\infty} \mu(R_k) \leq 2\mu(B) < \infty. \qquad \square \quad \text{S.3.3}$$

Satz 3.37

Das Hausdorff-Maß ist metrisch und somit Borelsch.

Beweis: Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A,B) = \delta_0 > 0$.

Jede Überdeckung $A \cup B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k)$ mit $r_k < \delta < \delta_0$

$\sum_{k=1}^{\infty} r_k^s \leq \mathcal{H}^s(A \cup B) + \varepsilon$ zerfällt in zwei Teile,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k) = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\rho_k}(y_k)}_{\subseteq B^c} \;\dot{\cup}\; \underbrace{\bigcup_{l=1}^{\infty} B_{R_l}(z_k)}_{\subseteq A^c}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^s + \sum_{l=1}^{\infty} R_l^s$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} r_k^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \to 0$: $\boxed{\mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) \leq \mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \quad \forall \delta < \delta_0.}$

$$\leq \mathcal{H}^s(A \cup B)$$

$\delta \to 0$ $\quad \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A \cup B).$

Satz 3.38

$\mathcal{H}^s$ ist Borel-regulär:

Beweis Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, OE $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ (sonst $G := \mathbb{R}^n$ Borelsch $\mathcal{H}^s(G) = \mathcal{H}^s(A)$)

Setze $\delta_\ell := \frac{1}{\ell}$ und finde $\forall \ell \in \mathbb{N}$ Überdeckung

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_{k\ell}}(x_{k\ell}) =: G_\ell \qquad r_{k\ell} < \delta_\ell \qquad \text{und}$$

$$\mathcal{H}^s_{\delta_\ell}(G_\ell) \leq \mathcal{H}^s_{\delta_\ell}(A) + \frac{1}{\ell} \leq \mathcal{H}^s(A) + \frac{1}{\ell}.$$

Dann ist $G := \bigcap_{\ell=1}^{\infty} G_\ell$ Borelsch, $A \subseteq G$ und

$$\mathcal{H}^s(G) \underset{\text{Def. } \mathcal{H}^s}{=} \lim_{\ell \to \infty} \mathcal{H}^s_{\delta_\ell}(G) \leq \lim_{\ell \to \infty} \mathcal{H}^s_{\delta_\ell}(G_\ell) \leq \mathcal{H}^s(A).$$

Da auch immer $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(G)$, $(G \supseteq A)$

$$\mathcal{H}^s(G) = \mathcal{H}^s(A).$$

$\square$ S.3.38

"s" in $\mathcal{H}^s$ ist Dimension:

Lemma 3.39 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < t < \infty$.

i) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$

ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$

Beweis: Sei $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, ~~$\delta \to 0$~~..

$$\underset{\mathcal{H}^s = \sup \mathcal{H}^s_\delta}{\Rightarrow} \mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty \quad \forall \delta > 0$$

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \; \exists \bigcup_{k=1}^\infty B_{r_k}(x_k)$ Überdeckung von A mit $r_k < \delta$ &

$$\sum_{k=1}^\infty r_k^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1.$$

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^\infty r_k^t \underset{t>s}{\leq} \delta^{t-s} \sum_{k=1}^\infty r_k^s \leq \delta^{t-s}\left(\mathcal{H}^s_\delta(A)+1\right)$$

$\delta^{t-s} \xrightarrow{\delta \to 0} 0$

lim $\delta \to 0$:

$$\mathcal{H}^t(A) \leq 0\left(\mathcal{H}^s(A)+1\right) = 0.$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (i)

$\square$

Def. 3.40

Die <u>Hausdorff-Dimension</u> einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert

als $$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s > 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

<u>Bemerkung:</u>

- Für jedes $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq n$.

  Tatsächlich, sei $s > n$. Betrachte $A_L := A \cap [-L, L]^n$, $L \in \mathbb{N}$.

  Dann können wir A_L durch $\sqrt{n}\left(\frac{L}{\delta}\right)^n$ viele Bälle vom radius δ überdecken

  $$\Rightarrow \quad \mathcal{H}^s_\delta(A_L) \leq \cancel{(\sqrt{n})^n \left(\frac{L}{\delta}\right)^n} \sum_{\#\text{Bälle}} \delta^s$$

  $$= \#\text{Bälle} \; \delta^s \leq \sqrt{n} \frac{L^n}{\delta^n} \delta^s = \sqrt{n} L^n \delta^{s-n} \xrightarrow{\delta \to 0} 0$$

  $$\Rightarrow \quad \mathcal{H}^s(A_L) = 0 \quad \forall L \in \mathbb{N}$$

  $$\Rightarrow \quad \mathcal{H}^s(A) \leq \sum_{L=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_L) = 0.$$

- Tatsächlich gilt $\mathcal{H}^n(A) = \omega_n \mathcal{L}^n(A)$.

  ω_n: Konstante

- Falls $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}\text{-}\dim(A) = s$.

Beispiel 3.41

Die Kantormenge wird wie folgt konstruiert:

$$A_0 := [0,1]$$
$$A_1 = [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{1}{3},1]$$

In jedem Konstruktionsschritt ~~Fh~~ $A_k \hookrightarrow A_{k+1}$ wird aus jedem Intervall das mittlere Drittel entfernt. Die Anzahl der Intervalle verdoppelt sich also jeden Schritt, die Länge der einzelnen Intervalle drittelt sich.

$$C := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k .$$

Beh. $\mathcal{H}\text{-}\dim(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

1. "$\leq$" : Im k-ten Schritt : # Intervalle 2^k
Länge der Intervalle $\left(\frac{1}{3}\right)^k$.

Also lässt sich C durch 2^k Intervalle ~~der Länge~~ mit radius $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ überdecken

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k}(C) \leq \sum_{\ell=1}^{2^k} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)^s = \left(\frac{1}{2}\right)^s \left(\frac{2}{3^s}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}^s(C) \leq \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^s \left(\frac{2}{3^s}\right)^k = \begin{cases} 0 & s > \frac{\ln 2}{\ln 3} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^s & s = \frac{\ln 2}{\ln 3} \\ \infty & s < \frac{\ln 2}{\ln 3} \end{cases}$$

Also gilt insbesondere

$$\mathcal{H}^s(C) = 0 \quad \forall\ s > \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Andere Richtung: $s := \frac{\ln 2}{\ln 3}$

Wir zeigen: Ist $(B_{r_i}(x_i))_{i=1}^{\infty}$ eine Überdeckung von C, so gilt $\sum_{i=1}^{\infty} (r_i)^s \geq \frac{1}{2^s 4}$.

Falls dies gilt: $\mathcal{H}^s_\delta(C) \geq \frac{1}{2^s 4}$ $\forall \delta > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(C) \geq \frac{1}{2^s 4}$

$\Rightarrow \infty > \mathcal{H}^s(C) > 0 \overset{\text{Bem. oben}}{\Rightarrow}$ Hausdorff-dim $C = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ „s".

1. Da C kompakt ist, reicht es $\square$ für endliche Überdeckungen zu zeigen.

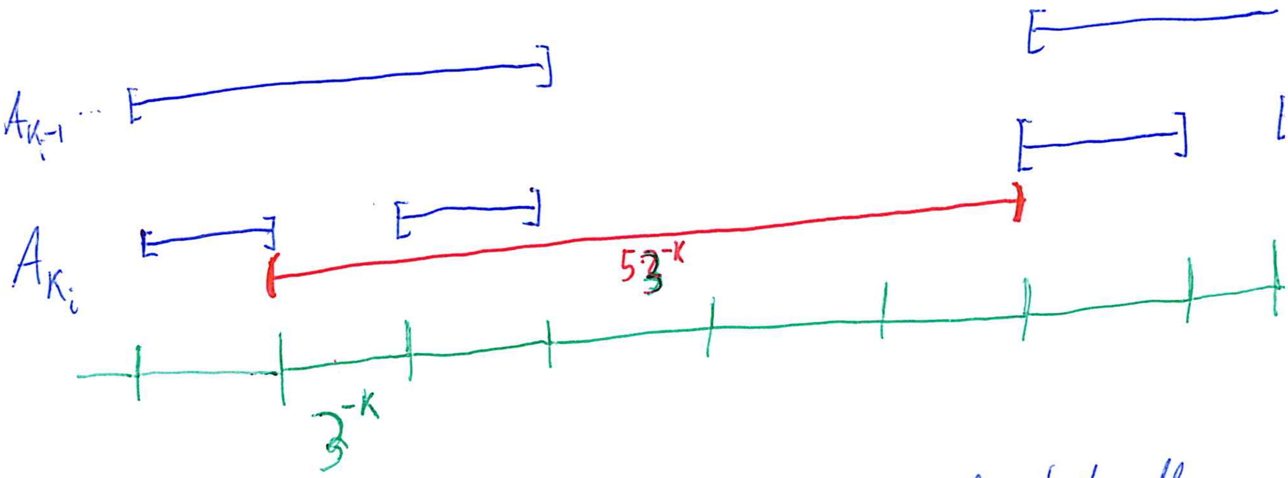
Sei also $N \in \mathbb{N}$, $(B_{r_i}(x_i))_{i=1}^{N}$ Überdeckung von C.

2. Fixiere ein $i \in \{1, \dots, N\}$. Wähle $K_i \in \mathbb{N}_0$ so dass

$$3^{-K_i - 1} \leq 2 r_i < 3^{-K_i}$$

(OE $r_i \leq \frac{1}{2}$, sonst $\square$ klar.)

Betrachte A_K die K-te Konstruktionsstufe von C



$B_{r_i}(x_i) = (x_i - r_i, x_i + r_i)$ berührt höchstens zwei der Intervalle von A_{K_i}, da sonst

$$2r_i \geq 5 \cdot 3^{-K_i} > 3^{-K_i} \quad \lightning \text{ Konstruktion von } K_i$$

$\Rightarrow$ $B_{r_i}(x_i)$ berührt höchstens $\underline{2^{j-K_i} \cdot 2}$ Intervalle von A_j für $j \geq K_i$.

Beachte: $$2^{j-K_i} \cdot 2 = 2^{j+1}\, 2^{-K_i} \underset{s = \frac{\ln 2}{\ln 3}}{=} 2^{j+1}\, 3^{-K_i s}$$

$$\underset{\text{Konstruktion von } K_i}{\leq} 2^{j+1}\, 3^s\, (2r_i)^s$$

$$= 2^{j+2}\, (2r_i)^s .$$

3. Sei $K := \max_{i=1,\dots,N} k_i$.

Schritt 2: $\Rightarrow$ $\forall i$: $B_{r_i}(x_i)$ berührt höchstens $2^{K+2}(2r_i)^s$ viele Intervalle von A_K.

$2^{-K} \overset{s=\frac{\ln 2}{\ln 3}}{=} 3^{-Ks}$

Also gilt:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{\{I \text{ Intervall in } A_K \text{ mit} \\ I \cap B_{r_i}(x_i) \neq \emptyset\}}} \left(3^{-K}\right)^s} \le \sum_{i=1}^{N} \left(2^{K+2}\right)(2 r_i)^s \, 3^{-Ks}$$

$$\boxed{= \left(\sum_{i=1}^{N} r_i^s\right) 4 \, 2^s.}$$

4. ~~Jedes~~ $\forall x \in C \ \exists! $ Intervall I in A_K mit $x \in I$.

Da $\left(B_{r_i}(x_i)\right)_{i=1}^{N}$ ganz C überdeckt $\Rightarrow$

$\forall$ Intervall I in A_K $\exists\, i \in \{1,\dots,N\}$ mit $B_{r_i}(x_i) \cap I \neq \emptyset$.

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{\{I \text{ Intervall in } A_K \text{ mit} \\ I \cap B_{r_i}(x_i) \neq \emptyset\}}} 3^{-Ks} \ge \sum_{\underbrace{\{I \text{ Intervall in } A_K\}}_{\# = 2^K}} 3^{-Ks} = 2^K 3^{-Ks} \underset{s=\frac{\ln 2}{\ln 3}}{=} 1.}$$

5. $\boxed{}$ & $\boxed{}$ $\Rightarrow$ $4 \cdot 2^s \sum_{i=1}^{N} r_i^s \ge 1$ $\square$