Satz 3.28 (Messbarkeit beim Lebesgue-Maß)

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent

(i) A ist $\mathcal{L}^n$-messbar

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G \supseteq A$ offen mit $\mathcal{L}^n(G \setminus A) < \varepsilon$

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Mit Korollar 3.25 gilt

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf_{\substack{G \supseteq A \\ G \text{ offen}}} \mathcal{L}^n(G) .$$

Zu $\varepsilon > 0$ $\exists$ G offen s.d. $\boxed{G \supseteq A}$

& $\boxed{\mathcal{L}^n(G) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon}$

$$\mathcal{L}^n(G) \overset{A \text{ messbar}}{=} \mathcal{L}^n(\underbrace{G \cap A}_{}) + \mathcal{L}^n(G \setminus A), \quad \mathcal{L}^n(G \cap A) = \mathcal{L}^n(A)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Falls } \mathcal{L}^n(A) < \infty}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^n(G \setminus A) \leq \varepsilon$.

Falls $\mathcal{L}^n(A) = \infty$,

setze $A_k := A \cap [-k,k]^n$ $\leftarrow$ messbar & $\mathcal{L}^n(A_k) < \infty$.

$\overset{\text{obige Rechnung}}{\Rightarrow} \exists \underset{\text{offen}}{G_k} \supseteq A_k$ mit $\mathcal{L}^n(G_k \setminus A_k) \leq \varepsilon 2^{-k}$

$G := \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ offen, $G \supseteq A$, $\cancel{G \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus A_k}$

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(G_k \setminus A_k) < \varepsilon.$$

$$\boxed{G \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus A_k}$$

//

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zu einem $\varepsilon > 0$ wähle G offen ($\Rightarrow$ messbar) mit $G \supseteq A$ & $\mathcal{L}^n(G \setminus A) \leq \varepsilon$.

Dann gilt $\forall\, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}^n(\cancel{G\cap} B) \overset{B \text{ messbar}}{=} \mathcal{L}^n(B \cap G) + \mathcal{L}^n(B \setminus G)$$

$$\underset{A \subseteq G}{\geq} \mathcal{L}^n(B \cap A) + \mathcal{L}^n(B \setminus A) - \mathcal{L}^n(G \setminus A)$$

$$B \setminus A = (B \setminus G) \cup (G \setminus A)$$

$$\geq \mathcal{L}^n(B \cap A) + \mathcal{L}^n(B \setminus A) - \varepsilon.$$

Lasse $\varepsilon \to 0$ $\Rightarrow$ A ist $\mathcal{L}^n$- messbar. $\square$

Folgerung 3.29

(i) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar

$\Leftrightarrow$ (ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ F, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $F \subseteq A \subseteq G$

F abgeschlossen, G offen

& $\mathcal{L}^n(G \setminus A) + \mathcal{L}^n(A \setminus F) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ (iii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ F abgeschlossen, G offen $G \supseteq A \supseteq F$

$\mathcal{L}^n(G \setminus F) < \varepsilon$.

Beweis $\boxed{\text{Ü}}$

Vergleich: Jordan-"Maß" $\longleftrightarrow$ Lebesgue-Maß

Jordan-Maß:

$$\underline{\mu}(A) := \sup\{\operatorname{vol}(E),\ E \subseteq A,\ E \text{ Elementarfigur}\}$$

$$\overline{\mu}(A) := \inf\{\operatorname{vol}(E),\ E \supseteq A,\ E \text{ Elementarfigur}\}$$

A heißt Jordan-Meßbar, Falls $\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A)$.

Satz 3.30 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt.

(i) Es gilt immer $\underline{\mu}(A) \leq \mathcal{L}^n(A) \leq \overline{\mu}(A)$.

(ii) Falls A Jordan-messbar $\Rightarrow$ A $\mathcal{L}^n$-messbar & $\mathcal{L}^n(A) = \underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A)$

Beweis: i)

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k)\ ;\ A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ I_k \text{ Intervalle}\right\}$$

$$\leq \inf\left\{\sum_{k=1}^{m} \operatorname{vol}(I_k),\ A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} I_k,\ I_k \text{ Intervalle},\ m \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= \overline{\mu}(A).$$

Weiterhin gilt für jede Elementarfigur $E \subseteq A$:

$$\operatorname{vol}(E) = \mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(A)$$

also auch $\underline{\mu}(A) \leq \mathcal{L}^n(A)$. //

(ii) Sei A Jordan-messbar.

Dann gilt $\underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A) \overset{(i)}{\Rightarrow} \underline{\mu}(A) = \mathcal{L}^n(A) = \bar{\mu}(A)$.

Zeige noch, dass A $\mathcal{L}^n$-messbar ist:

OE $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ (sonst betrachte $A \cap [-k,k]^n$).

F. $\varepsilon > 0$ Da A Jordan-messbar $\Rightarrow \exists$ Elementarfiguren $I_\varepsilon, I^\varepsilon$

$$I_\varepsilon \subseteq A \subseteq I^\varepsilon$$

$$\mathrm{vol}(I^\varepsilon) - \varepsilon < \underset{\underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A)}{\underset{\parallel}{\mathcal{L}^n(A)}} < \mathrm{vol}(I_\varepsilon) + \varepsilon$$

OBdA ist I^ε offen. $G := I^\varepsilon$.

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) \leq \mathcal{L}^n(G \setminus I_\varepsilon) = \mathrm{vol}(I^\varepsilon \setminus I_\varepsilon)$$

$$\underset{I_\varepsilon \subseteq I^\varepsilon}{\underset{\uparrow}{=}} \mathrm{vol}(I^\varepsilon) - \mathrm{vol}(I_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

$\Rightarrow$ A ist nach Satz 3.28 messbar $\square$

Satz 3.31 (Bewegungs-invarianz)

Das Lebesgue-Maß ist invariant unter "Kongruenten" Bewegungen,

d.h. $\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \mathcal{L}^n(A)$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$ und

allen $\Phi : \underset{\in \mathbb{R}^n}{x} \longmapsto \underset{\in \mathbb{R}^n}{x_0} + \underset{\in O(n)}{R}x$

Beweis:

i) Das Jordan'sche Maß ist bewegungsinvariant

$\Rightarrow$ $\forall$ Intervalle I: $\mathcal{L}^n(\Phi(I)) = \mu(\Phi(I)) = \mu(I) = \mathcal{L}^n(I)$.

$\Phi(I)$ Jordan-messbar

$\underset{S.3.30}{\Rightarrow}$ $\mathcal{L}^n$-messbar

ii) $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ← disjunkte Intervalle.

$\Rightarrow$ $\Phi(G)$ offen

$\Phi(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(I_k)$ ← disjunkt, $\mathcal{L}^n$-messbar.

$$\mathcal{L}^n(\Phi(G)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\Phi(I_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_k) = \mathcal{L}^n(G).$$

(iii) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $G \supseteq A$ offen

$\Leftrightarrow$ $\Phi(A) \subseteq \Phi(G)$ & $\Phi(G)$ offen

$\Rightarrow$ mit Kor. 3.25:

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \inf_{A \subseteq G,\ G \text{ offen}} \mathcal{L}^n(\Phi(G)) \overset{(ii)}{=} \inf_{\substack{A \subseteq G \\ G \text{ offen}}} \mathcal{L}^n(G) = \mathcal{L}^n(A).$$

$\square$

Satz 3.32 (nicht-messbare Mengen)

Die Vitali-Menge aus Lemma 2.1. ist <u>nicht</u> $\mathcal{L}^1$-messbar.

<u>Beweis:</u> wie in Lemma 2.2: Statt (M1) $\leadsto$ Satz 3.11. (i)

(M2) Satz 3.31

(M3) $\mathcal{L}^1([0,1)) = 1$

$\boxed{\mathcal{U}}$