3.3. Das Lebesgue-Maß

Idee: Definiere L.-Maß als ~~Hah.~~ (Caratheodory-Hahn) Erweiterung des Volumens von Elementarfiguren.

Def. 3.21 (Quader & Elementarfiguren)

(i) $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_i < b_i \quad \forall\, 1 \le k \le n$.

Intervall

$$[a,b] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) \\ [a,b) \\ (a,b] \end{array}\right\} \text{analog}$$

(ii) Der Elementarinhalt eines Intervalls $[a,b]$ ~~ist~~ wie oben ist

$$\mathrm{vol}([a,b]) = \mathrm{vol}((a,b)) = \mathrm{vol}([a,b)) = \mathrm{vol}((a,b])$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (a_i - b_i) \in [0, \infty]$$

(iii) Elementarfigur ist die Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle $I_1, \dots, I_m$

$$\mathrm{vol}\Big(\bigcup_{k=1}^{m} I_k\Big) := \sum_{k=1}^{m} \mathrm{vol}(I_k).$$

- Die Menge der Elementarfiguren im $\mathbb{R}^n$ ist Algebra.
- vol ist additiv, σ-endlich, nicht-negativ

<u>Prämaß</u> (auf Menge der Elementar-Figuren)

Falls $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ <u>disjunkte Vereinigung</u>

Elementarfigur

$$\mathrm{vol}(I) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_k).$$

"$\geq$": vol ist endlich additiv + monoton

$$\Rightarrow \quad \mathrm{vol}(I) \geq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{k=1}^{m} I_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{vol}(I_k) \xrightarrow{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_k).$$

"$\leq$" Sei $\varepsilon > 0$, $\bar{I}$ Abschluss von I.

OBdA $0 \in I$, I, I_k Interv[alle]

Es gilt

$$\bar{I} \subseteq (1+\varepsilon) I = \bigcup_{k=1}^{\infty} (1+\varepsilon) I_k.$$

Wähle $\tilde{I}_k$ offenes Intervall s.d. $\cdot\ \tilde{I}_k \supseteq (1+\varepsilon) I_k$

$\cdot\ \mathrm{vol}(\tilde{I}_k) \leq (1+\varepsilon)^n \mathrm{vol}(I_k) + \varepsilon 2^{-k}$.

$\Rightarrow$ $\bar{I}$ wird von $\tilde{I}_k$ überdeckt.

OBdA I beschränkt (sonst betrachte $I \cap [-L, L]^n$ für $L \to \infty$)

$\Rightarrow$ $\bar{I}$ kompakt.

$\Rightarrow \quad \bar{I}$ kompakt

$\Rightarrow \quad \bar{I} = \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{I}_{k_i}$ (endlich viele!)

$$\mathrm{vol}(I) \leq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{N} \tilde{I}_{k_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \mathrm{vol}(\tilde{I}_{k_i})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(\tilde{I}_k)$$

$$\leq (1+\varepsilon)^n \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_k) + \varepsilon .$$

Mit $\varepsilon \to 0$ erhält man Beh. $\square$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{vol ist Prämaß auf Algebra der Elementarfiguren}}$

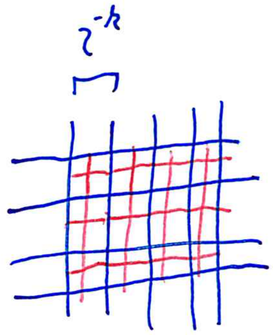
<u>Def. 3.22</u> (Lebesgue-Maß)

Das <u>Lebesgue-sche Maß $\mathcal{L}^n$</u> auf $\mathbb{R}^n$ ist die Caratheodory-Hahn-Erweiterung des ~~$\mathcal{A}$~~ Elementar-Inhaltes.

Satz 3.23

Jede offene Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Vereinigung ~~von~~ disjunkter Intervalle.

Insbesondere (mit Satz 3.9) ist jede offene & abgeschlossene Menge ist $\mathcal{L}^n$-messbar.



Beweis:

Für $k \in \mathbb{N}$ unterteile $\mathbb{R}^n$ in disjunkte 2^{-k}-weite Boxen/Gitter $[a, a+2^{-k})$

Die Menge dieser Boxen sei I_k.

Durch zentrieren gilt $Q \in I_{k+1}$, $\tilde{Q} \in I_{k}$

dann entweder $Q \subseteq \tilde{Q}$ oder $Q \cap \tilde{Q} = \emptyset$.

(Dyadiche Unterteilung)

~~$G_k := \{ Q \in I_k , Q \subseteq G \ \& \ Q$~~

$$G_k := \bigcup \{ Q \in I_k , Q \cap G_{k-1} = \emptyset , Q \subseteq G \} \cup G_{k-1}.$$

__Definition 3.24__ Sei X eine Menge, $\mathcal{O} \subseteq 2^X$ die offenen TMon X.

- Die <u>Borelsche σ-Algebra</u> $\mathcal{B}$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen von X enthält.
- Ein Maß μ heißt <u>Borelsch</u>, falls jedes Element von $\mathcal{B}$ auch μ-messbar ist.

__Korollar 3.25__

- Das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^n$ ist Borelsch.
- Für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf_{\substack{G \supseteq A \\ G \text{ offen}}} \mathcal{L}^n(G).$$

__Beweis:__

"$\leq$" Folgt aus Monotonie von $\mathcal{L}^n$.

"$\geq$" Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $(I_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ Intervalle, so dass $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_\ell \supseteq A$ und

$$\mathcal{L}^n(A) + \varepsilon \geq \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_\ell) \qquad (*)$$

Seien I_ℓ^* offene Intervalle, $I_\ell^* \supseteq I_\ell$, $\mathrm{vol}(I_\ell^*) \leq \mathrm{vol}(I_\ell) + 2^{-\ell}\varepsilon$

$G := \bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_\ell^*$ offen, $G \supseteq A$ &

$$\cancel{\mathcal{L}^n(A) + \varepsilon}\ \mathcal{L}^n(G) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_\ell) + \varepsilon \overset{(*)}{\leq} \mathcal{L}^n(A) + 2\varepsilon$$

Beh. folgt aus $\varepsilon \to 0$. $\square$

Def. 3.26 Ein Borel-Maß μ heißt Borel-regulär, falls zu jedem $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $B \supset A$ existiert mit

B Borel-Menge & $\mu(B) = \mu(A)$.

Korollar 3.27 Das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^n$ ist Borel-regulär.

Beweis: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

· Falls $\mathcal{L}^n(A) = \infty$ wähle $B := \mathbb{R}^n$.

· Falls $\mathcal{L}^n(A) < \infty$, dann $\exists$ nach ~~Satz~~ Kor. 3.25 offene Mengen G_k, so dass gilt

$$G_k \supseteq A \quad \& \quad \mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(G_k) < \mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere $\mathcal{L}^n(G_1) < \infty$, und OE $G_k \supseteq G_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Setze $B := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ (borelsche Menge!), und

$$\mathcal{L}^n(B) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}^n(B_n) = \mathcal{L}^n(A)$$

Satz 3.11 (iii)

$\square$ K.3.27