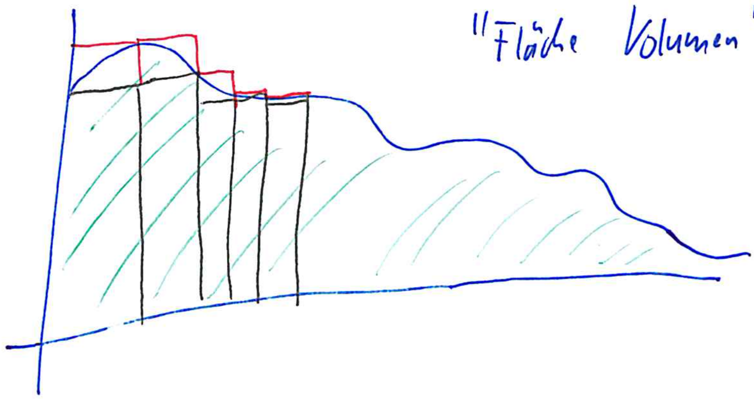
2: Motiviation & Probleme beim Messen

Messen von Mengen

"Fläche Volumen"

Integration $\longleftrightarrow$

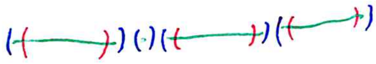


Idee des Riemann-Integrals:

JORDAN-"MAß": "Approximation durch Boxen" von außen/innen"

Inhalt

Ziel: Länge der Geraden



$J := \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} (a_i, b_i),\ n \in \mathbb{N},\ a_i \le b_i \right\}$ "Elementar Figuren"

(a_i, b_i) paarweise disjunkt

disjunkt

Setze Länge $\mu((a,b)) := |b-a|$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu((a_1,b_1) \cup (a_2,b_2)) = \mu(a_1,b_1) + \mu(a_2,b_2)$

inner Inhalt: $\underline{\mu}(A) := \sup\{\mu(M),\ M \in J,\ M \subseteq A\}$

äußer Inhalt $\bar{\mu}(A) := \inf\{\mu(N),\ N \in J,\ N \supseteq A\}$

Falls $\underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A)$, dann ist $\mu(A) := \underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A)$ Länge von

Problem:

Selbst abzählbare Vereinigungen können nicht messbar sein.

Bsp: $A := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ← abzählbare Vereinigung von Pkten!

Falls $M \subseteq A$, $M \in \mathcal{J}$ $\Rightarrow M = \emptyset \Rightarrow \underline{\mu}(A) = 0$

↑ A kein inneres

$\operatorname{int} A = \emptyset$

Falls $N \supseteq A$, $N \in \mathcal{J}$ $\underset{\mathbb{Q}\text{ dicht}}{\Rightarrow}$ $N \supseteq [0,1] \supseteq (0,1)$

$\overline{\mu}(A) \geq \overline{\mu}((0,1)) = 1$

$\Rightarrow \underline{\mu}(A) \neq \overline{\mu}(A)$

⇝ Problem: $\mu(\{q_i\}) = 0$

aber $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{q_i\}\right)$ ↯

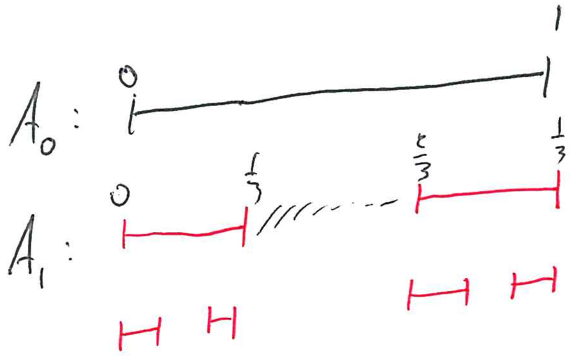
$\shortparallel$

$\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Dies bereitet auch weitere Probleme:

Sei C die Cantor-Menge,

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$



⋮

charakteristische Funktion

Sei $f_n(x) = \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_n \\ 0 & x \notin A_n \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \|f_n - f_m\|_{L^1} = \int_0^1 |f_n - f_m| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

Aber der Limes $f_n(x) \longrightarrow \chi_C(x) \quad \forall x \in [0,1]$

ist <u>nicht</u> integrierbar.

"Nicht-Vollständigkeit"

Idee: Definiere ~~Maß~~ Volumenbegriff μ in $\mathbb{R}^n$ $\mu: 2^{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty]$!
mit den Eigenschaften

(M1) Falls $A_1, A_2, \dots$, abzählbare Folge disjunkter Teilmengen in $\mathbb{R}^n$, dann gelte

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots$$

(M2) Sind A, B kongruent (A kann durch Drehung/Spiegelung/Translation in B überführt werden)

so gilt $\mu(A) = \mu(B)$

(M3) Für den Quadr $Q = [0,1) \times \dots \times [0,1)$ in $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu(Q) = 1.$$

Hoffnung: $\exists$ ~~nicht-triviales~~ μ, dass diese Eigenschaften erfüllt.

Dilemma von Vitali / Existenz nicht-messbarer Mengen

Lemma 2.1:

$\exists\ V \subseteq [0,1)$ (Vitalimenge)

mit

(1) Falls $x \neq y$, $x, y \in V \Rightarrow x-y \notin \mathbb{Q}$.

(2) ~~Falls~~ $\forall x \in \mathbb{R}$, so $\exists z \in \mathbb{Q}$ mit $x-z \in V$.

Beweis:

Äquivalenzklasse von $\mathbb{R}$: $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x-y \in \mathbb{Q}$.

Betrachte $\mathbb{R}/_\sim = \{ [x],\ x \in \mathbb{R} \}$

$$[x] = \{ y \in \mathbb{R},\ x-y \in \mathbb{Q} \}$$

Auswahlaxiom: $\mathbb{R}$ dargestellt als disjunkte Vereinigung der Mengen $[x]$

$\rightsquigarrow \exists\ V \subseteq \mathbb{R}$ das genau einen Repräsentanten $\bar{x}$ aus jedem $[x]$ enthält.

OE $\bar{x} \in [0,1)$, da $[\bar{x} - k] = [\bar{x}]$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\square$

Lemma 2.2

Jedes μ mit (M1), (M2), (M3) macht keinen Sinn auf V, von L. 2.1

$\mu(V)$ nicht wohldefiniert

("V nicht μ-messbar")

Beweis:

Sei $\{q_1, q_2, \ldots\} = \mathbb{Q} \cap (-1,1)$

$$V_k := q_k + V \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Es gilt:

- $V_k \cap V_\ell = \emptyset$ für $\ell \neq k$ (*)

  $\left[q_k + v_1 = q_\ell + v_2 \Rightarrow v_1 \sim v_2 \overset{\text{Eig. (1)}}{\Rightarrow} v_1 = v_2 \right.$

  $\left. \Rightarrow q_k = q_\ell \right]$

- $[0,1) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subseteq [-1,2)$ (**)

  $V_k \subseteq$ $V \subseteq [0,1)$

  $\big[$ Sei $x \in [0,1)$. Sei $v \in [x] \cap V \subseteq [0,1)$

  $\Rightarrow \exists\ x - v \in \mathbb{Q} \cap (-1,1) \Rightarrow x - v = q_k$ für ein k,

  $x \in V_k$.

Nun gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\right) \overset{(M1)}{\underset{(*)}{=}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V_k) \overset{(M2)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V)$$

Außerdem folgt aus (M1):

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

Somit (**) $\Rightarrow$

$$1 = \mu([0,1)) \underset{(**)}{\leq} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\right) \leq \mu([-1,2))$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V)$$

$$\mu([-1,2)) \leq \mu([-1,0)) + \mu([0,1)) + \mu([1,2)) = 3$$

Also $1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V) \leq 3$ ↯

□ L.2.2.

Paradox von Banach-Tarski

(M1) ist also sehr starke Vorraussetzung,

die $\exists$ von nicht-messbaren Mengen impliziert

Aber auch für abgeschwächte Version

(M1') $A_1, \dots, A_N$ endlich viele paarweise disjunkte Mengen

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_N) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_N)$$

impliziert die Existenz nicht-messbarer Mengen:

Satz 2.3 (Banach Tarski)

U, V offene Teilmengen im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.
$\neq \emptyset$

Dann $\exists\, N \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_N \subseteq \mathbb{R}^n$ ~~so dass~~ & $E_k \cap E_j = \emptyset$ $k \neq j$

$F_1, \dots, F_N \subseteq \mathbb{R}^n$ $F_k \cap F_j = \emptyset$ $k \neq j$

mit: E_k kongruent zu F_k $\forall k = 1, \dots, N$

$$U = \bigcup_{i=1}^{N} E_i \quad , \quad V = \bigcup_{j=1}^{N} F_j .$$

Mit Satz 2.3 finden wir nicht - messbare Mengen:

Q offener Einheitsquader

$\tilde{Q} := Q + (5, 0, \dots, 0)$ verschobener Einheitsquader

$(M1') \Rightarrow \quad \mu(Q \,\dot\cup\, \tilde{Q}) = \mu(Q) + \mu(\tilde{Q}) = 2\mu(Q)$

disjunkt

Mit Satz 2.3 , $U := Q$, $V := Q \cup \tilde{Q}$

$= \dot{\bigcup} E_i \qquad = \bigcup F_i$

$$\mu(Q) = \mu(U) \overset{(M1')}{=} \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{N} \mu(F_i) \overset{(M1')}{=} \mu(Q \cup \tilde{Q}).$$

$E_i \sim F_i$ kongruent

$\Rightarrow \quad \mu(Q) = 2\mu(Q) \quad \Rightarrow \mu(Q) = 0$ $\lightning$ Einheitsquader $\mu(Q) = 1$

$\Rightarrow$ Eines der $\mu(E_i)$, $\mu(F_i)$ kann keinen Sinn machen.

Moral:

- Riemann-Ansatz: "Jordan-Maß"
  - Die abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter Mengen kann u.U. nicht gemessen werden

- Axiomatischer Ansatz:

  Wir können nicht alle Mengen sinnvoll messen, falls wir (M1) oder (M1') fordern.

⇝ Lösung:
- Akzeptiere ∃ nicht-messbare Mengen
- Später "Lebesgue-Maß" erfüllt (M1) – (M3) für messbare Mengen.