L^2 - Theorie

- Punktweise Konvergenz von S_n ~~f stetigen~~ selbst bei stetigen f nicht gegeben

$\rightsquigarrow$ betrachte schwächere Konvergenz:

L^2 - Konvergenz / Konvergenz im quadratischen Mittel.

"Lebesgue"-Raum $\rightsquigarrow$ später!

Def. 1.13 (L^2 - Konvergenz)

- Eine Folge $f_n \in R(\mathbb{T})$ konvergiert gegen ein $f \in R(\mathbb{T})$ in L^2,

Falls

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = 0$$

- Das (L^2-)Skalarprodukt(*) auf $R(\mathbb{T})$ ist definiert als

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \overline{g(t)} \, dt.$$

(*) Skalarprodukt - Eigenschaften:

✓ (i) $\langle f,g \rangle = \overline{\langle g,f \rangle}$

✓ (i) $\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \langle f,h \rangle + \mu \langle g,h \rangle$ $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \; f,g \in R(\mathbb{T})$

✓ (i) $\langle f,f \rangle \geq 0$

✗ (i) $\langle f,f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ (f z.B. in einem Punkt neu definiert)

$\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ hält z.B. bei stetigen Funktion

i.A. $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ fast überall

↳ später

- f ist orthogonal zu g $\quad (f, g \in R(\mathbb{T}))$

$:\Leftrightarrow \quad \langle f, g\rangle = 0$

$$f \perp g$$

z.B. für $e_k := e^{ikx}$ gilt

$$\langle e_k, e_j\rangle = \delta_{kj} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

Kronecker-Symbol
-Delta

- L^2-Norm: $f \in R(\mathbb{T})$

$$\|f\|_2 = \|f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)} := \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2}.$$

also $f_n \to f$ in L^2 $:\Leftrightarrow \|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Lemma 1.14 (Eigenschaften der L^2-Konvergenz)

$f_n, f \in R(T)$.

- $f_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow$ $f_n \to f$ in L^2 $\boxed{\text{Ü}}$

  $\cancel{\Leftarrow}$ i.A.

- $f_n \to f$ punktweise $\not\Rightarrow$ i.A. $\cancel{\|f_n - f\|_{L^2} \to 0}$ $f_n \to f$ in L^2

- $\cancel{\|f_n - f\|_2}$ $f_n \to f$ in L^2 $\cancel{\Rightarrow}$ $f_n \to f$ punktweise

  $\exists$ Beispiele $f_n \to f$ in L^2

  aber $f_n(x) \not\to f(x)$ für jedes x

  ↳ allerdings $\exists$ Teilfolge $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ s.d.

  $f_{n_i}(x) \xrightarrow{i \to \infty} f(x)$ für fast alle x

  später!

Satz 1.15 (Minimal-Eigenschaft der Fourier-Polynome)

Sei $f \in R(\mathbb{T})$. Dann gilt für jedes trigonometrische Polynom T vom Grad $\leq n$:

(i) $\|f - S_n[f]\|_{L^2} \leq \|f - T\|_{L^2}$

(ii) $\|f - S_n[f]\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \Rightarrow \|f - S_n[f]\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$

$\Downarrow \quad \|S_n[f]\|_{L^2}^2 \leq 2\|f\|_{L^2}^2$

Beweis:

Recall: $e_k(x) := e^{ikx}$.

Dann ist $$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e_k$$

$$\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle.$$

Sei nun $T = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e_k$ ein trig. Polynom vom Grad $\leq n$.

Mit $\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl}$

$$\Rightarrow \langle f - T, f - T \rangle = \langle f, f \rangle + \langle T, T \rangle - \langle f, T \rangle - \overline{\langle f, T \rangle}$$

$$= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=-n}^{n} |\gamma_k|^2 \overset{= \gamma_k \overline{\gamma_k}}{} \cancel{+ \sum_{k=-n}^{n} (\gamma_k + \overline{\gamma_k}) \langle e_k, f \rangle}$$

$$- \sum_{k=-n}^{n} \left(\hat{f}(k)\, \overline{\gamma_k} - \overline{\hat{f}(k)}\, \gamma_k \right)$$

$$= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k) - \gamma_k|^2 - |\hat{f}(k)|^2$$

$= \cancel{\|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |f|}$

setze $T := S_n[f]$ $\Longrightarrow$ (ii)

$\Longrightarrow \quad \|f - S_n[f]\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|$

$< \quad \|f - T\|_2^2$ $\Longrightarrow$ (i).

Falls $\gamma_k \neq \hat{f}(k)$

Für ein $k \in \{-n, \dots, n\}$

□ 5.1.15

aus (ii) Folgt sofort

<u>Korollar 1.16</u> (Besselsche Ungleichung)

$f \in R(\mathbb{T})$, dann

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

konvergiert!!!

(~~bisher~~ bisher: " $\hat{f}(k) \longrightarrow 0$ "

Satz 1.16. (Konvergenz der Fourier-Reihe gegen f in L^2)

Sei $f \in R(\mathbb{T})$, dann gilt

$$\|f - S_n[f]\|_2^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

[keine Stetigkeit, differenzierbarkeit Nötig!]

Es gilt Parseval-Gleichung / (Plancherell-Identität)

$$\|f\|_{L^2}^2 = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2\right) \Leftarrow \text{Satz 1.15 (ii)}$$

Allgemeiner gilt:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, \overline{\hat{g}(k)}$$

[Folgt, da $z\bar{w} = \left(\frac{1}{4} |z+w|^2 - |z-w|^2 + i\,|z+iw|^2 - i\,|z-iw|^2\right)$

$\forall z, w \in \mathbb{C}$]

Beweis von Satz 1.16:

1.) Sei $\underset{R(\mathbb{T})}{\underset{\uparrow}{f}}$ zunächst stetig.

Nach Satz 1.7 (Fejér) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n[f](x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

und mit (ii) ist dieser Limes <u>gleichmäßig</u>.

Mit Lemma 1.14. gilt also

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - \sigma_n\|_{L^2} = 0.$$

Mit der Minimal-Eigenschaft der Fourier-Polynome, Satz 1.15 gilt

$$\|f - S_n[f]\|_{L^2} \le \|f - \underset{\text{trig. Polynom vom Grad} \le n}{\underset{\uparrow}{\sigma_n}}\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \|f - S_n[f]\|_{L^2} = 0$$

2) Für allgemeine $f \in R(T)$ benötigen wir:

Lemma 1.17 (Approximationslemma)

Sei $f \in R(T)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ $\exists$ stetiges $\tilde{f} \in R(T)$ mit $\|f - \tilde{f}\|_{L^2} \le \varepsilon$

(zunächst ohne Beweis)

Für jedes $\varepsilon > 0$. ~~Wähle~~ ~~Da~~ Sei $\tilde{f}$ die Funktion von Lemma 1.17. Wähle nach 1) N so groß, dass $\|\tilde{f} - S_n[\tilde{f}]\|_{L^2} \le \varepsilon \quad \forall n \ge N$

$$\|f - S_n[f]\|_{L^2} \overset{\Delta}{\le} \underbrace{\|f - \tilde{f}\|_{L^2}}_{\le\ \varepsilon} + \underbrace{\|\tilde{f} - S_n[\tilde{f}]\|_{L^2}}_{\le\ \varepsilon} + \underbrace{\|S_n[f - \tilde{f}]\|_{L^2}}_{\le \text{ siehe S. 1.15 } 2\|f-\tilde{f}\| \le 2\varepsilon}$$

Linearität von S_n

$$\cancel{\|S_n[g]\|^2_{L^2} \le \left(\|S_n[g] - g\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\right.}$$

$$\cancel{\le \|g}$$

$$\le 4\varepsilon \qquad \forall n \ge N$$

$$\Rightarrow \|f - S_n[f]\|_{L^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \qquad \square$$

Mathematische Anwendungen

- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\boxed{\text{(Basler Problem)}}$

Euler

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & , x \in (0, \pi) \\ \frac{-x-\pi}{2} & x \in (-\pi, 0) \\ 0 & x \in 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi\text{- periodisch.} & \end{cases}$$

Es gilt:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underset{\text{ungerade}}{f(x)} \Big(\underset{\text{gerade}}{\cos(kx)} + i \underset{\text{ungerade}}{\sin(-kx)} \Big)\, dx$$

$$= -\frac{2}{2\pi}\, i \int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(kx)\, dx = \begin{cases} \frac{1}{k} \cdot & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Parsevall'sche Identität

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

$$\parallel$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad //$$

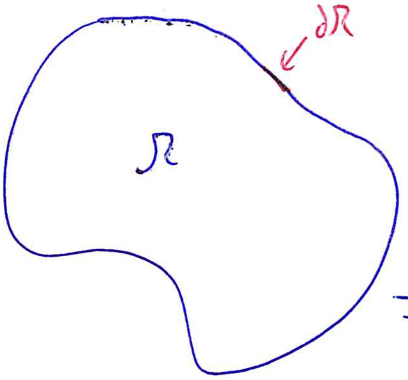
~~Satz~~ Isoperimetrische Ungleichung

Satz 1.18

Sei Ω eine ~~Kurve~~ 2D-Menge und $\partial\Omega$ die Randkurve,

Dann ist die Fläche von Ω maximal so groß wie

$$\frac{1}{4\pi}\cdot(\text{Länge von } \partial\Omega)^2.$$

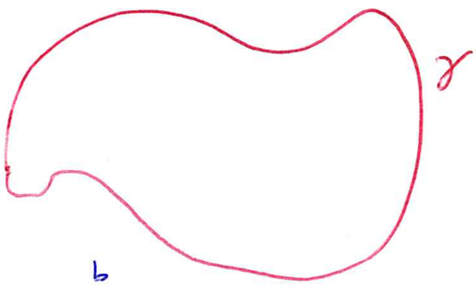


Falls die Fläche von Ω gleich $\frac{1}{4\pi}(\text{Länge } \partial\Omega)^2$

$\Rightarrow$ Ω ist ein Kreis.

Genauer: Für eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

geschlossen: $\gamma(a) = \gamma(b)$.



$$L(\gamma) := \int_a^b |\dot\gamma(t)| = \int_a^b \sqrt{(\dot x(t))^2 + (\dot y(t))^2}\, dt$$

Länge von γ.

$$|F(\gamma)| := \left| \frac{1}{2} \int_a^b x(t)\dot y(t) - y(t)\dot x(t) \right|$$

Fläche von dem von γ umschlossenem Gebiet.

Beh: $|F| \le \frac{1}{4\pi} L^2$ für jedes γ.

& Falls $|F| = \frac{1}{4\pi} L^2 \Rightarrow \gamma$ ist Kreisrand!

(Hurwitz 20):

OBdA: $L(\gamma) = 2\pi$ (reskalierung)

$\boxed{\text{Zeige: } |F| \leq \pi}$

OBdA: $|\dot\gamma(t)| = 1$ $\forall t \in [a,b]$ (Bogenlängen-Parametrisierung)

OBdA $[a,b] = [0, 2\pi]$ (da $\int_a^b |\dot\gamma(t)| = L(\gamma) = 2\pi$

$= \int_0^{2\pi} 1$

$\Rightarrow |b-a| = 2\pi$.)

Fasse $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ als komplexe Zahl auf:

$\gamma(t) = x(t) + i\, y(t)$ | $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

OBdA 2π-periodisch fortgesetzt

Es gilt mit Parsevall:

$$\|\dot\gamma\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\dot\gamma}(n)|^2 \quad (*)$$

$$1 \overset{\text{Vor.}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\dot\gamma|^2 dt$$

Es gilt nach [$\dot y$], dass

$$\hat{\dot\gamma}(k) = i\,k\,\hat\gamma(k)$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \quad (**) \qquad \boxed{1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2\, |\hat\gamma(k)|^2}$$

Andererseits:

Flächeninhalt $|F|$:

$$|F| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(x(t)\dot y(t) - y(t)\dot x(t)\right) dt = \left|\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_0^{2\pi} \overline{\gamma(t)}\cdot\dot\gamma(t)\right|$$

$$= \left|\pi\,\mathrm{Im}\left(\langle\dot\gamma,\gamma\rangle_{L^2}\right)\right|$$

$$\overset{\text{S. 1.16 Parseval}}{=} \left|\pi\,\mathrm{Im}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\hat\gamma(k)}\left(\hat\gamma(k)\,ik\right)\right| \qquad (***)$$

$$= \left|\pi\,\mathrm{Im}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat\gamma(k)|^2\, ik\right|$$

$$= \pi\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat\gamma(k)|^2 k\right|$$

$$\leq \pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat\gamma(k)|^2\,|k|$$

Also: mit (**) & (***)

$$\pi - |F| \geq \pi \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{(k^2 - |k|)}_{\geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(k)|^2 \right) \geq 0$$

Also $\underline{|F| \leq \pi}$ //

Falls ~~außerdem~~ $|F| = \pi$.

$$\Rightarrow (k^2 - |k|) |\hat{\gamma}(k)|^2 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \hat{\gamma}(k) = 0 \quad \forall k \neq \{0, 1, -1\}$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_{-1} e^{-it}$$

$$\Rightarrow |F| = \pi \Rightarrow \boxed{\left| |c_1|^2 - |c_{-1}|^2 \right| = 1}$$

$e^{it} \perp e^{-it}$!

$e^{it} \perp c_0$

$e^{-it} \perp c_0$

Außerdem OBdA $|\gamma(t)| = 1 \Rightarrow \boxed{|c_1|^2 + |c_{-1}|^2 = 1}$

$c_1 = 0$, $|c_{-1}| = 1$ oder

$|c_1| = 1$, $c_{-1} = 0$

$\Rightarrow \gamma$ beschreibt Kreis $\square$