Reelle Analysis:

Überblick:

1. FOURIER REIHEN

   Zerlegung von Fkt in Frequenzen

2. Maß- und Integrationstheorie inkl. Lebesgue-Maß

   - "Wie kann man "Mengen messen" " ("Volumen"?)

     ⇝ Probleme des Riemann-Integral-Ansatz

     "Jordan-Maß" "kein Maß!"

     ⇝ Nicht-messbare Mengen-Problem

   Abstrakt: σ-Algebren & Masse & messbare Mengen

   ↳ Messbare Funktionen

   ↳ Integration

Kapitel 1 FOURIER-REIHEN

Ziel: sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch

d.h. $f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Finde $(a_k)_{k=-\infty}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ so dass

abhängig von f

so dass

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{ikx}$$

"Einheitsvektoren einer Orthonormalbasis"

⌈allgemeiner "Wavelets"⌋

Falls das ginge:

- Abzählbar viele Werte a_k beschreiben Funktion f (definiert auf überabzählbar vielen Punkten!)
- Bei guter Konvergenz der Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \cdots$
  $\rightsquigarrow$ endlich viele Werte a_k beschreiben fast f.

⇝ Wir könnten also Funktionen mit endlich vielen Werten übermitteln

Wichtig für Signal-transfer, Kompression, etc.

FORMALE RECHNUNG:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \, e^{ikx}$$

| multipliziere mit e^{-ilx} und integriere

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ilx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx} e^{-ilx}\, dx$$

Formal!!!

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x}\, dx}_{= \begin{cases} 2\pi & k=l \\ 0 & k\neq l \end{cases}}$$

→ "Orthogonalität von $(e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$"

$$= 2\pi a_l .$$

Also Formal: $$\boxed{a_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ilx}\, dx =: \hat{f}(l)}$$

FOURIER-TRA
von f an $l\in\mathbb{Z}$

FRAGE:

- Für welche f macht
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k)$$
Sinn? (punktweise?, welche Konvergenz?)

- Wann gilt / In welchem Sinne gilt
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx} \quad ?$$

1.1. Grundlegende Definitionen

Def. 1.1 Trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$ $T(x)$:

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx} \quad , x \in \mathbb{R}$$

für Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$, $-n \leq k \leq n$.

- Es gilt (nach obiger Rechnung, die nun auch tatsächlich gilt)
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x)\, e^{-ikx}\, dx .$$

- $T(x+2\pi) = T(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, da

$$e^{ik2\pi} = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

also T ist 2π-periodisch.

Trigonometrische Reihe $S(x)$ bedeutet

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

für trigonometrische Polynome $T_n(x)$ vom Grad $\le n$.

⌈ In welchem Sinne konvergiert $S(x)$? ⌋

⌈ Welche Eigenschaften hat $S(x)$? ⌋

Beispiele

$$\sin x = \frac{1}{2i} e^{ix} - \frac{1}{2i} e^{-ix}$$

trig. Polynome.

$$\cos x = \frac{1}{2} e^{ix} + \frac{1}{2} e^{-ix}$$

$$S(x) := \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} e^{ikx}$$

← abs. konvergent, da $\sum \frac{1}{k^2} < \infty$

$|e^{ikx}| \leq 1$.

$\Rightarrow$ $S(x)$ glm. konvergent auf $[-\pi, \pi]$.

$\Rightarrow$ S stetig.

Definition 1.2

$$R(\mathbb{T}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch } \& \text{ integrierbar} \}$$

(Riemann)

Klar: jedes trig. Polynom T gehört zu $R(\mathbb{T})$

Def. 1.3 Für $f \in R(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\hat{f}(k) \equiv \hat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx}$$

<u>k-ter Fourier-Koeffizient</u> / <u>Fourier-Transformation.</u>

$$\boxed{S_n[f](x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}}$$

ist das <u>n-te Fourier-Polynom</u>,

$$\boxed{S(f)(x) := \lim_{n \to \infty} S_n(f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx}}$$

ist die <u>Fourier-Reihe</u> von f.

Darstellung in cos–sin:

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$$

$$\rightsquigarrow \quad S_n[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right),$$

mit

$$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \quad , k = 0, 1, \ldots$$

$$b_k = i\hat{f}(k) - i\hat{f}(-k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \quad , k = 1, 2, \ldots$$

⌈Beachte: f ungerade Fkt $\Rightarrow$ $a_k = 0$
$f(-x) = -f(x)$

f gerade Fkt $\Rightarrow$ $b_k = 0$. ⌋
$f(-x) = f(x)$

Beispiel: 1.4. Sei $f(x) = \begin{cases} |x| & x \in [-\pi, \pi] \\ 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt} & \text{auf } \mathbb{R} \end{cases}$

f gerade $\Rightarrow$ $b_k = 0$.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x| \cos(kx)}_{\text{gerade!}}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(kx)\, dx = \begin{cases} \pi & k = 0 \\ -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \left(1 - (-1)^k\right) & k \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad S[f](x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \quad S[f](0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)$$

Falls nun gälte: $S[f](0) = f(0) = |0| = 0$

$\Rightarrow$ Wir finden

$$\frac{\pi^2}{8} = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right).$$

[Wir sehen später im Darstellungssatz, Korollar 1.8, das tatsächlich $S[f](0) = f(0)$.]

Abfallverhalten der FOURIER-Koeffizienten

Sei $f \in R(\mathbb{T})$.

Es gilt: $$|\hat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, \underbrace{|e^{-ikx}|}_{=1}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx .$$

Fourier-Koeffizienten sind beschränkt durch das Integral von $|f|$!

Tatsächlich gilt

$$\lim_{k \to \infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Das folgt mit $e^{ikx} = \cos kx + i \sin x$ aus:

Lemma 1.5 (Riemann-Lebesgue Lemma)

Sei $F: [a,b] \to \mathbb{C}$ integrierbar. Dann gilt

$$\lim_{|k| \to \infty} \int_a^b F(x) \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} dx = 0.$$

Beweis

1. Vertauschen von $\int$ und $\lim\limits_{k\to\infty}$ ist sinnlos,

da $\lim\limits_{k\to\infty} \sin(kx)$ $\not\exists$ für $x \neq 0$.

2. Sei f zunächst eine Treppenfunktion, d.h.
seien $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{C}$, $i=1,\dots,$

~~$f(x) = \sum A_{[x_i, x_{i+1})}$~~

$$f(x) = c_i \quad \text{für} \quad x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \sin kx \, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(\cos(kx_{i-1}) - \cos(kx_i))}{k}$$

also $$\left|\int_a^b f(x) \sin kx \, dx\right| \le \frac{1}{|k|} 2 \sum_{i=1} |c_i| \xrightarrow{|k|\to\infty} 0.$$

$|\cos z| \le 1$

3.) Sei $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

Dann: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Treppenfkt $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$

mit $f \le F \le g$ auf $[a,b)$

und $0 \le \int_a^b (g-f)(x)\,dx \le \varepsilon$

Satz von Darboux

$$\Rightarrow \left| \int_a^b F(x) \sin kx\,dx - \underbrace{\int_a^b f(x) \sin kx\,dx}_{\to 0 \text{ für } k \to \infty} \right|$$

$$= \left| \int_a^b (F(x) - f(x)) \sin(kx)\,dx \right|$$

$$\le \int_a^b |F(x) - f(x)| \underbrace{|\sin kx|}_{\le 1}\,dx \,, \quad \boxed{0 \le F(x) - f(x) \le g(x) - f(x)}$$

$$\le \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \le \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ machbar ist, folgt aus 2. angewandt auf f die Behauptung, da

$$\limsup_{k \to \infty} \left| \int_a^b F(x) \sin kx\,dx \right| < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

$\square$

Konvergenzsätze von Fejér und Dirichlet

"Neue" Darstellung von $S_n[f](x)$:

$$S_n[f](x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt\, e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} e^{ikx} \right)}_{} dt$$

$$D_n(x-t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}.$$

Dirichlet-Kern. n-ten Grades.

Es gilt

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{e^{ikx}}_{= (e^{ix})^k} = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} & \text{für } x \neq 0 \\ 2n+1 & x = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ü}}$: $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} z^l = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ (Falls $z \neq 1$), $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Also:

$$S_n[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \; D_n(x-t)\,dt$$

Schreibweise

$$= \quad f * D_n \; (x)$$

"Konvolution" $\quad f * g\,(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(x-t)\,dt.$

Für Konvolutionen gilt:

Ü

- $f*g = g*f$ — Symmetie
- $f*(g+h) = f*g + f*h$ — Distributivität
- $f*(g*h) = (f*g)*h$ — Assoziativ.
- $\widehat{(f*g)}(k) = \hat{f}(k)\cdot\hat{g}(k)$

Fourier-Transform: "Konvolution → Produkt"

Wir wollen also rausfinden ob

$$S_N[f] = \lim_{n\to\infty} D_n * f \quad \text{konvergiert.}$$

Dazu führen wir ein: den

<u>Fejer-Kern n-ten Grades</u>

$$F_n(x) := \frac{D_0(x) + D_1(x) + \dots + D_{n-1}(x)}{n}$$

$$\overset{\boxed{\text{Ü}}}{=} \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{(\sin \frac{1}{2} n x)^2}{(\sin \frac{1}{2} x)^2} & x \neq 0 \\ n & x = 0. \end{cases}$$

Es gilt

- $F_n(x) = F_n(-x)$ (F0)

gilt ~~nicht~~ für D_n!

- $F_n(x) \geq 0$ (F1)
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1$ (F2)
- $\forall \varepsilon > 0$, $\pi > r > 0$ $\exists N \geq 1$ s.d. (F3)

$$\int_{[-\pi,\pi] \setminus [-r,r]} F_n(t)\,dt \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Die letzte Eigenschaft folgt, da

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-r,r]} F_n(t)\,dt \le 2\pi \, \frac{1}{n} \, \frac{1}{(\sin\frac{1}{2}r)} \quad \text{klein für } n \text{ groß.}$$

direkte Rechnung für F_n

Def. 1.6.

Für $f \in R(\mathbb{T})$, $n = 1, 2, \ldots$

n.-te Fejér-Polynom

$$\sigma_n[f] := F_n * f = \frac{1}{n}\left(S_0 f + S_1 f + \ldots + S_{n-1} f\right).$$

arithmetische Mittel der Fourier-Polynome $S_0 f \ldots S_{n-1} f$

"Cesaro-Mittelbildung".

Für diese Fejér-Polynome haben wir eine erste Konvergenzaussage:

Satz 1.7. (Satz von Fejer)

Für jedes $f \in R(\mathbb{T})$ gilt:

(i) Falls einseitigen Grenzwerte $f(x_-) = \lim_{y \nearrow x} f(y)$,

$$f(x_+) = \lim_{y \searrow x} f(y)$$

existieren für ein $x \in \mathbb{R}$, dann

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n[f](x) = \frac{1}{2}\left(f(x_-) + f(x_+)\right).$$

Insbesondere, Falls f stetig im Punkt x

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sigma_n[f](x) = f(x).$$

(ii) Ist f überall stetig auf $\mathbb{R}$, so konvergiert $\sigma_n[f]$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen f.

Als Korollar:

Korollar 1.8 (Darstellungssatz)

Sei $f \in R(\mathbb{T})$. Falls die Fourier-Reihe $S[f]$ in einem Punkt x konvergent ist, so gilt

$$S[f](x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

Insbesondere gilt, falls zusätzlich f stetig in x

$$S[f](x) = f(x).$$

Beweis K. 1.8.:

Setzen wir $s_n := S_n[f](x)$, so ist

$$\sigma_n := \sigma_n[f](x) = \frac{1}{n}(s_0 + \dots + s_{n-1})$$

das arithmetische Mittel ~~der~~ von $(s_1, \dots, s_{n-1})$.

Konvergiert $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, so konvergiert auch $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\boxed{\text{Ü}}$.
mit gleichem Grenzwert, d.h.

$$S(f)(x) = \lim_{n \to \infty} S_n[f](x) = \lim_{n \to \infty} \sigma_n[f](x)$$

Behauptung folgt aus Satz 1.7. $\square$

Beweis von Satz 1.7.:

Wir nehmen an f ist stetig in x. Allgemeiner Fall analog.

Es gilt

$$f(x) \overset{(F2)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, F_n(t)\, dt,$$

also

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big)\, F_n(t)\, dt \right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\, \underbrace{\cancel{|}F_n(t)\cancel{|}}_{\overset{\|}{F_n(t)\ \underset{(F1)}{\ge}\ 0}}\, dt$$

Gegeben $\varepsilon > 0$.

- Da f stetig in x $\Rightarrow$ $\exists\, r > 0$ s.d. $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall\, |t| < r$.
- f Riemann-integrierbar $\Rightarrow$ f beschränkt $\Rightarrow$ $\sup_{[-\pi,\pi]} |f| \le K$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad |\sigma_n[f](x) - f(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} \varepsilon\, F_n(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-r,r]} 2K\, F_n(t)\, dt$$

$$\overset{(F3)\ \forall n \ge N(\varepsilon, r)}{\le} \frac{\varepsilon + 2K\varepsilon}{2\pi} \quad \text{klein für } \varepsilon \text{ klein!} \qquad //(i)$$

(ii) Falls f ~~g~~ stetig, auf $[-\pi,\pi]$ so kann r unabhängig von x zo-

gewählt werden $\Rightarrow$ $|\sigma_n[f](x) - f(x)|$ klein unabhängig von x für n groß.

$\square$

Beispiel 1.9.

Sei
$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi, 0) \\ 0 & x = 0, -\pi, \pi \\ 1 & (0, \pi) \end{cases}$$
2π-periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$

Berechne $Sf(x)$ in cos-sin-Darstellung:

f ungerade $\rightsquigarrow$ $a_k = 0$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \quad \operatorname{sign}(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin kx \; dx$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{k}\pi & k = 1, 3, \dots \\ 0 & k \text{ gerade.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad S[f](x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right)$$

Konvergent!

~~$f(\cdot)$ ist in jedem Punkt links- und rechtsseitig~~

f ist nicht stetig, aber

Für jedes x gilt

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x_-) + f(x_+)\right)$$

$\Big[\ x \neq k\pi \rightsquigarrow f$ ist stetig

$x = k\pi \rightsquigarrow f(x_+) + f(x_-) = 0$

$\& \ f(x) = 0 \ \Big]$

K.1.8. $\Rightarrow$ $\quad f(x) = S[f](x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Setzen wir $x = \frac{\pi}{2}$ ein

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$$

also gilt $\quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ //

FRAGE: Wann konvergiert denn $Sf[x]$?

<u>ein</u> hinreichendes Kriterium:

<u>Satz 1.10</u> (Satz von Dirichlet):

Sei $f \in R(\mathbb{T})$ und $x \in (-\pi, \pi]$, s.d. f sowohl linksseitig, als auch rechtsseitig diff'bar ist

$\Big[\ f'_-(x) = \lim_{t \uparrow x} \frac{f(t) - f(x_-)}{t - x}$

$f'_+(x) = \lim_{t \downarrow x} \frac{f(t) - f(x_+)}{t - x} \ \Big]$

Dann konvergiert $S[f]$ an der Stelle x, und

$$Sf[x] = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

Falls f zudem stetig, $Sf[x] = f(x)$.

Klar ist dann:

Korollar 1.11

f wie in Satz 1.10, f differenzierbar in x,

dann konvergiert $Sf(x)$, und es gilt $Sf(x) = f(x)$.

Zum Beweis von Satz 1.10 reicht es zu zeigen, dass $Sf(x)$ konvergiert. Die Behauptung folgt dann aus Kor. 1.8. Darstellungssatz

Es gilt

$$S_n[f](x) = (f * D_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, dt.$$

Nun gilt $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\, dt = \frac{1}{2}$ (aus expliziter Formel für D_n)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} f(\cancel{x}_-) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(\cancel{x}_-)\, D_n(t)\, dt$$

Also $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)\, D_n(t) - \frac{1}{2} f(x_-)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \big(f(x-t) - f(x_-)\big)\, D_n(t)\, dt$$

Mit der Formel für $D_n(t)$ folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)\,D_n(t) \quad - \frac{1}{2} f(x_-)$$

$$= \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{f(x-t)-f(x_-)}{t} \quad \frac{t}{\sin\frac{1}{2}t}}_{=:F(t)} \quad \sin((n+\tfrac{1}{2})t) \; dt$$

, beachte dass $\lim_{t\to 0} F(t) = 2 f_+'(0)$.

Also ist $F(t)$ Riemann-integrierbar, mit Lemma 1.5 (Riemann-Lebesgue) gilt somit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)\,D_n(t)\,dt \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} f(x_-) \;,$$

analog gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)\,D_n(t)\,dt \longrightarrow \frac{1}{2} f(x_+)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,D_n(t)\,dt}_{= S_n[f](x)} \longrightarrow \frac{1}{2} f(x_+) + \frac{1}{2} f(x_-) .$$

$\square$ 5.1.10.

Bemerkung 1.12:

- $\exists$ Beispiele, dass Stetigkeit nicht für die Konvergenz reichen, d.h.
  $\exists$ stetiges $f \in R(\mathbb{T})$ so dass $S[f]$ bei $x=0$ divergiert.

- Man kann zeigen, das Sf "fast überall" konvergiert.