Reelle Analysis . Serie 9

A32: $f_k = -\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_k(0))} \chi_{B_k(0)}$ ist eine Treppenfunktion denn $\operatorname{Im}(f_k) = f_k(\mathbb{R}^n)$

$= \{0; -\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_k(0))}\}$ abzählbar ist (auch endlich).

(i) Nach Def. 5.2 von die Integral für Treppenfunktionen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k\, dx = \sum_{0<a<\infty}' a\, \mathcal{L}^n(f_k^{-1}\{a\}) = -\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_k(0))} \cdot \mathcal{L}^n(B_k(0)) = -1.$$

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fixiert. Da $\forall k > |x|$, $x \in B_k(0)$, $f_k(x) = -\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_k(0))}$

Erinnere dass $\mathcal{L}^n(B_k(0)) = c_n \cdot k^n$, mit $c_n > 0$ (dimensional Konstant)

Bemerkung: $\mathcal{L}^n(B_k(0)) = \int_{B_k(0)} dx \underset{\text{Polarkoordinaten}}{=} \int_{r=0}^{k} \int_{S^{n-1}} r^{n-1}\, dr\, d\sigma$ mit $\sigma =$ Lebesgue Maß auf S^{n-1}

oder sehe Kugelkoordinaten: $d\sigma = \sin(\varphi_1)^{n-2} \sin(\varphi_2)^{n-3} \dots \sin(\varphi_{n-2})\, d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}$

und $\mathcal{L}^n(B_k(0)) = \frac{\sigma(S^{n-1})}{n} \cdot k^n$ $\quad (c_1 = 2,\ c_2 = \pi,\ c_3 = \frac{4\pi}{3}$ etc..)

Also, $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \frac{1}{c_n} \lim_{k\to+\infty} (k^{-n}) = 0$ und $\liminf_{k\to+\infty} f_k(x) = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\inf_{j\geq k} f_j(x)}_{= f_k(x)} = 0.$

(iii) Satz 5.18 (Fatou's Lemma): $g_k : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ $\mathcal{L}^n$-messbar

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to+\infty} g_k\, dx \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k\, dx$. Mit $g_k = -f_k > 0$, finden wir:

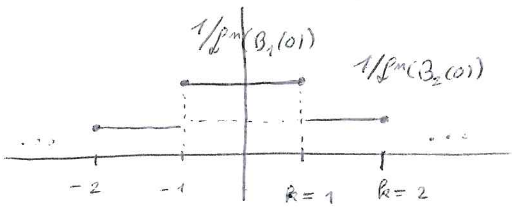
$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\liminf_{k\to+\infty}(-f_k)}_{= -\limsup_{k\to+\infty} f_k = 0}\, dx \leq \liminf_{k\to+\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (-f_k)\, dx}_{= 1 \text{ von (i)}}$$ d.h. $0 \leq 1$. Kein Widerspruch.

(iv) $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ (Punktweise Konvergenz) aber $-1 = \int_{\mathbb{R}^n} f_k\, dx \underset{k\to+\infty}{\not\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to+\infty} f_k\, dx = 0$

denn $|f_k| \leq g$, $\forall k \in \mathbb{N}$ mit $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist nicht möglich.

Durch Widerspruch, nehmen wir an $|f_k| \leq g$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Dann $g \geq \sum_{k=1}^{\infty}' \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_k(0))} \chi_{B_k(0)\setminus B_{k-1}(0)}$ (Treppenfunktion)



mit Konvention $B_0(0) = \{0\}$ oder $\emptyset$.

Also, $\int_{\mathbb{R}^n} g\, dx \underset{\substack{\text{Monotonie} \\ \text{von } \int_{\mathbb{R}^n}}}{\geq} \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^{\infty}' k^{-n} \underbrace{\mathcal{L}^n(B_k(0)\setminus B_{k-1}(0))} \geq n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}$

$\underset{B_k(0)\ \mathcal{L}^n\text{-messbar}}{=} \mathcal{L}^n(B_k(0)) - \mathcal{L}^n(B_k(0) \cap B_{k-1}(0)) = c_n (k^n - (k-1)^n)$

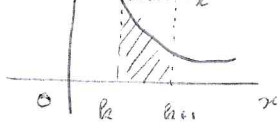
$\underset{\text{Binomischer Lehrsatz}}{=} c_n \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (k-1)^j - (k-1)^n\right) \geq n \cdot c_n (k-1)^{n-1}$

und noch dazu $\frac{k-1}{k} \geq \frac{1}{2}$, $\forall k \geq 2$. also $\int_{\mathbb{R}^n} g\, dx \geq n \cdot 2^{1-n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. Widerspruch

$g \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung: $\forall N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=2}^{N}' \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2}^{N}' \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_{2}^{N+1} \frac{dx}{x} = \ln(N+1) - \ln(2)$$



A33: (i) Sei $f_n(x) = \dfrac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in]0,+\infty[$.

Von Taylor: $\sin(X) = X - \frac{X^3}{6} + O(X^5)$ also, $\frac{\sin(X)}{X} = 1 - \frac{X^2}{6} + O(X^4) \xrightarrow[X\to 0]{} 1$

und $X \overset{h}{\longmapsto} \begin{cases} \frac{\sin(X)}{X}, & X\neq 0 \\ 1, & X = 1\end{cases}$ ist stetig auf $[0,+\infty[$.

Da $[0,1]$ Kompakt ist und h stetig, $\exists\, \tilde{C}>0$ s.d. $|h(X)| \le \tilde{C}$, $\forall X\in[0,1]$

Dann $\forall X\geq 1$, $|h(X)| \le \frac{1}{X} \le 1$. Also, $\forall X \ge 0$, $|h(X)| \le C =: \max(\tilde C, 1)$

Von dies dann folgt $|f_n(x)| \le \dfrac{C}{1+x^2}$ } unabhängigen von n, $\in L^1([0,+\infty[)$

Wir beschließen durch Dominiert Konvergenz (Satz 5.21) dass:

$$\int_{[0,+\infty[} f_n\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctan}(x)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

da $\text{Arctan}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

(ii) $$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1+(n+1)x^2 - (1+x^2)(1+nx^2)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{x^2 - x^2(1+nx^2)}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{-nx^4}{(1+x^2)^{n+1}} < 0$$ & $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ $\mathcal{L}^1$-messbar

mit $f_1 > f_2 > \dots > f_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ also durch Beppo-Levi (Satz 5.20)

$$\int_{[0,1]} f_n\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{=0}\,dx = 0$$

weil $f_n(x) = \exp\Big[\underbrace{\ln(1+nx^2) - n\ln(1+x^2)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty}\Big]$

denn $\dfrac{\ln(1+nx^2)}{n} = \dfrac{\ln(1+nx^2)}{1+nx^2}\cdot\dfrac{1+nx^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(iii) $$\sum_{k=1}^\infty \int_\Omega f\chi_{A_k}\,d\mu = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^N \int_\Omega f\chi_{A_k}\,d\mu \underset{\text{Linearität von } \int_\Omega}{=} \lim_{N\to+\infty}\int_\Omega \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^N f\chi_{A_k}\Big)}_{\underset{\text{disjunkte}}{\overset{(A_k)}{=}} f\chi_{\bigcup_{k=1}^N A_k} =: f_N} d\mu$$

Nun $f_N: \Omega\to[0,\infty)$ μ-messbar ist und $f_{N+1}-f_N = f\chi_{A_{N+1}} \ge 0$

Also, durch Beppo-Levi finden wir $\lim_{N\to+\infty}\int_\Omega f_N\,d\mu = \int_\Omega \lim_{N\to+\infty} f_N\,d\mu = \int_\Omega f\chi_{\bigcup_{k=1}^\infty A_k}\,d\mu$

A34: (i) Sei $f=\chi_\mathbb{Q}$ und $g=0$.

•) g ist stetig und $f(x)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q})=0$ (weil $\mathbb{Q}$ ist abzählbar)

D.h. $f=g$ $\mathcal{L}^1$-a.e.

•) f nirgends stetig ist: $\exists\, \varepsilon_0 = 1>0$, $\forall x_0\in\mathbb{R}$, $\forall\alpha>0$, $\exists\, y_0\in\mathbb{R}$: $|x_0-y_0|<\alpha$ und $|f(x_0)-f(y_0)|\ge\varepsilon_0$ trotzdem

Falls $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall\alpha>0$, $\exists\, y_0\in\mathbb{Q}$: $|x_0-y_0|<\alpha$ denn $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

Falls $x_0\in\mathbb{Q}$, $\forall\alpha>0$, $\exists\, y_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $|x_0-y_0|<\alpha$ denn $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

Auf jeden Fall, $|f(x_0)-f(y_0)| = 1 \ge \varepsilon_0$ und f ist nicht stetig in x_0.

(ii) Sei $f = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} = \chi_{[0,+\infty[}$ (Heaviside) Treppenfunktion.

$f \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ also stetig $\mathcal{L}^1$- fast überall.

Nach Widerspruch, nehmen wir an $g \in C^0(\mathbb{R})$ s.d. $f(x) = g(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus N$, $\mathcal{L}^1(N) = 0$.

.) $\mathcal{L}^1(N) = 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (\mathbb{R} \setminus N) \cap]-\infty, 0[\neq \emptyset$, und so $g(x_0) = f(x_0) = 0$.

.) $g(x_0) = 0 < 1 = g(0)$ und $\frac{1}{2} \in]0,1[$ also wir beweisen von der Zwischenwertsatz dass $\exists x_1 \in]x_0, 0[$ s.d. $g(x_1) = \frac{1}{2}$.

Nun sei $U := g^{-1}(\underbrace{]\tfrac{1}{4}; \tfrac{3}{4}[}_{\text{offen}})$. $\left.\begin{array}{l} g \text{ stetig} \Rightarrow U \text{ offen} \\ x_1 \in U \Rightarrow U \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \exists r > 0$ s.d. $B_r(x_1) \subset U$

Aber $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = \{0;1\}$. so $f(x) \neq g(x) \ \forall x \in U$. D.h. $U \subset N$.

Also $B_r(x_1) \subset U \subset N$ und $\mathcal{L}^1(N) \geq \mathcal{L}^1(B_r(x_1)) > 0$. Widerspruch.

A35. (i) $\tilde{\nu} : \Sigma_\mu \longrightarrow [0,\infty]$ ein Prä-Maß ist:

.) $\tilde{\nu}(\emptyset) = \int_\emptyset f \, d\mu = 0$ denn $\mu(\emptyset) = 0$ (also $\emptyset \in \Sigma_\mu$).

.) Sei $(A_k) \subset \Sigma_\mu$ paarweise disjunkte Teilmenge und $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Wir haben:

$$\tilde{\nu}(A) = \int_A f \, d\mu \overset{5.14}{=} \int_\Omega f \chi_A \, d\mu \underset{\text{def.}}{=} \int_\Omega f \chi_{\bigcup_{k=1}^\infty A_k} \, d\mu \overset{A33(iii)}{=} \sum_{k=1}^\infty \underbrace{\int_\Omega f \chi_{A_k} \, d\mu}_{= \tilde{\nu}(A_k)}.$$

(ii) ~~Die~~ Die Carathéodory-Hahn Erweiterung ν ist definiert ~~als~~ durch:

$$\nu(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty \tilde{\nu}(A_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k, \ A_k \in \Sigma_\mu \right\}.$$

Also für (A_k) paarweise disjunkte Menge in Σ_μ, haben wir:

$$\nu(A) \leq \sum_{k=1}^\infty \tilde{\nu}(A_k) \overset{(i)}{=} \int_{\bigcup_{k=1}^\infty A_k} f \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu < +\infty$$ weil $f \in L^1(\Omega)$ (und $f \geq 0$).

(iii) $\left.\begin{array}{l} \mu \text{ Radon-Maß} \Rightarrow \mu \text{ Borelsch} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \Sigma_\mu \\ \text{Carathéodory-Hahn} \Rightarrow \Sigma_\mu \subset \Sigma_\nu \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \Sigma_\nu$

(iv) .) ν ist endlich durch (ii), also auch lokal-endlich ist.

.) ν Borel-regulär ist. Das beweisen wir in 2 Schritte

(a) $\forall A \subseteq \Omega$, $\exists \tilde{A} \in \Sigma_\mu$ s.d. $A \subseteq \tilde{A}$ und $\nu(A) = \nu(\tilde{A})$ $(= \tilde{\nu}(\tilde{A}))$.

(b) $\forall A \subseteq \Sigma_\mu$, $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ s.d. $A \subseteq B$ und $\tilde{\nu}(A) = \tilde{\nu}(B)$

Beweis von (b): μ Radon $\Rightarrow \mu$ Borel-regulär $\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ s.d. $A \subseteq B$ und $\mu(A) = \mu(B)$.

Also, $\nu(B) \underset{B \in \Sigma_\mu}{=} \tilde{\nu}(B) = \int_B f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \underbrace{\int_{B \setminus A} f \, d\mu}_{=0} = \int_A f \, d\mu = \tilde{\nu}(A) = \nu(A)$

$=0$ da $A \in \Sigma_\mu \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ $(B \cap A = A)$.

Bemerkung: Wir müssen ein bisschen vorsichtig mit diesem letzten Schritt zu sein.

Wenn $\mu(A) < \infty$ dann $\mu(B) = \mu(A) < \infty$ und $A \in \Sigma_\mu \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(B \cap A) = 0$

Also $\int_{B\setminus A} f\,d\mu = 0$. (1)

Wenn $\mu(A) = \infty$ Wir können mit Induktion wie so folgern:

·) $k=1$: Sei $A_1 := A \cap B_1(0)$. Nach (1) man kann $B^1 \supseteq A$ finden s.d. $\mu(A_1) = \mu(B^1)$.

·) $k \in \mathbb{N}^*$. Nehmen an wir haben $A_k \subseteq B^k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ s.d. $\mu(A_k) = \mu(B^k) < \infty$.

Dann man kann $K \geq k+1$ finden s.d. $B^k \subseteq A \cap B_K(0) \underset{def}{=:} A_{k+1}$.

Nach (1) für A_{k+1}, finden wir wieder $B^{k+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ s.d. $A_{k+1} \subseteq B^{k+1}$ und $\mu(A_{k+1}) = \mu(B^{k+1})$

Sei nun $B \underset{def}{:=} \bigcup_{k=1}^{\infty} B^k \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$. Haben wir $B \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{j=1}^{\infty} B^k \cap A_j^c}_{\subset B^k \setminus A_k}$

Also, $\mu(B \setminus A) \leq \sum_{k \geq 1} \underbrace{\mu(B^k \setminus A_k)}_{=0} = 0$ und $\int_{B\setminus A} f\,d\mu = 0$ folgt.

Beweis von (a): Sei $A \subseteq \Omega$. Mit Definition von $\nu(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (A_k^{(n)})_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma_\mu$ paarweise disjunkte [wenn nicht ändern $A_k^{(n)} \leftarrow A_k^{(n)} \setminus \bigcup_{j<k} A_j^{(n)}$] s.d.

$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)}$ und $\nu(A) \geq \sum_{k \geq 1} \tilde{\nu}(A_k^{(n)}) - \frac{1}{n}$. Sei $\tilde{A} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)}}_{\in \Sigma_\mu} \in \Sigma_\mu$

·) $\forall n \geq 1$, $A \subseteq A^{(n)} := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)} \Rightarrow A \subseteq \tilde{A} \underset{\text{Monotonie von } \nu}{\Rightarrow} \nu(A) \leq \nu(\tilde{A})$.

·) $\nu(A) \geq \underbrace{\sum_{k \geq 1} \tilde{\nu}(A_k^{(n)})}_{\tilde{\nu}(A^{(n)})} - \frac{1}{n} = \tilde{\nu}(A^{(n)}) - \frac{1}{n} \geq \tilde{\nu}(\tilde{A}) - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \nu(\tilde{A})$.

σ-additivität von $\tilde{\nu}$ $\qquad$ $\tilde{A} \subseteq A^{(n)}$. Monotonie von $\tilde{\nu}$

(v) Sei $A \subseteq \Omega$ und $\nu := \mu \llcorner \chi_B$.

·) (iv)(a) $\Rightarrow \exists \tilde{A} \in \Sigma_\mu$ s.d. $A \subseteq \tilde{A}$ und $\nu(A) = \tilde{\nu}(\tilde{A})$. Also, mit Monotonie von μ:

$\mu(B \cap A) \underset{A \subseteq \tilde{A}}{\leq} \mu(B \cap \tilde{A}) = \int_{\tilde{A}} \chi_B\,d\mu = \tilde{\nu}(\tilde{A}) = \nu(A)$.

·) Wir benutzen die Gleiche Methode wie für (iv)(a), aber mit μ eher als ν und $f = \chi_B$.

$\mu(B \cap A) \geq \sum_{k \geq 1} \underbrace{\mu(B \cap A_k^{(n)})}_{= \tilde{\nu}(A_k^{(n)}) \text{ da } A_k^{(n)} \in \Sigma_\mu} - \frac{1}{n} \overset{\sigma\text{-add.}}{=} \nu(A^{(n)}) - \frac{1}{n} \geq \nu(A) - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \nu(A)$

$\exists (A_k^{(n)}) \subset \Sigma_\mu$ wie so denn μ ein Maß ist

(vi) Sei $A \subseteq \Omega$ s.d. $\mu(A) = 0$, dann $A \in \Sigma_\mu$ und so:

$\nu(A) = \tilde{\nu}(A) = \int_A f\,d\mu = 0$.