Reelle Analysis - Serie 12

A44: Sei der Satz die Induktion $P(N) := \left\{ \begin{array}{l} \forall\, 1 \le r, p_i \le \infty,\ 1 \le i \le N \text{ s.d. } \frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \\ \forall f_i \in L^{p_i}(\Omega),\ 1 \le i \le N : \\ \|f_1 \cdots f_N\|_{L^r(\Omega)} \le \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_N\|_{L^{p_N}} \end{array} \right\},\ \forall N \in \mathbb{N}^\times$

$P(2)$ ist wahr: $P(2) =$ die üblich Hölder

$P(N)$ wahr $\Rightarrow$ $P(N+1)$ wahr: Für $f_i \in L^{p_i}$, $1 \le i \le N+1$, mit $\frac{1}{r} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}}_{=: \frac{1}{p}} + \frac{1}{p_{N+1}}$, haben wir:

$$\|f_1 \cdots f_{N+1}\|_{L^r} \underset{\text{Hölder}}{\le} \|f_1 \cdots f_N\|_{L^p} \|f_{N+1}\|_{L^{p_{N+1}}}$$

$$\underset{\substack{P(N)\\ \text{für } r = p}}{\le} \left(\|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_N\|_{L^{p_N}} \right) \cdot \|f_{N+1}\|_{L^{p_{N+1}}}$$ und deshalb $P(N+1)$ ist auch wahr.

A45: (i) Für $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in B_\rho(0) \Leftrightarrow |x| < \rho$ i.e. $|x| \in (-\rho, \rho)$, und somit

$$\chi_{B_\rho(0)}(x) = \chi_{(-\rho,\rho)}(|x|) \quad (\text{D.h. } \tilde{f} = \chi_{(-\rho,\rho)} \text{ hier})$$

(ii) $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ radial $\Rightarrow \exists\, \tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}}$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \tilde{f}(|x|) \\ g(x) = \tilde{g}(|x|) \end{array} \right.$

Dann können wir schreiben:

- $|f|(x) = |f(x)| = |\tilde{f}(|x|)| = |\tilde{f}|(x)$ (i.e. $\widetilde{|f|} = |\tilde{f}|$)
- $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \max\{\tilde{f}(|x|), \tilde{g}(|x|)\} = \max\{\tilde{f}, \tilde{g}\}(|x|)$ (i.e. $\widetilde{\max\{f,g\}} = \max\{\tilde{f}, \tilde{g}\}$)
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x) = (\tilde{f} \cdot \tilde{g})(|x|)$ (i.e. $\widetilde{fg} = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$).
- $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \tilde{f}(|x|) + \mu \tilde{g}(|x|)$ (i.e. $\widetilde{\lambda f + \mu g} = \lambda \tilde{f} + \mu \tilde{g}$).

Also, alle diesen Funktionen radial sind.

(iii) Mit die Polarkoordinaten-Formel, schreiben wir:

- $$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mathcal{L}^2 = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \underbrace{f(r\cos\theta, r\sin\theta)}_{= \tilde{f}(r), \text{ weil}} \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{= dx_1\, dx_2} \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{r=0}^{\infty} \tilde{f}(r) \underbrace{\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right)}_{= 2\pi} r\,dr$$

$$|(r\cos\theta, r\sin\theta)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Euklidische Norm}}}{=} \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = r. \qquad = 2\pi \int_0^\infty \tilde{f}(r)\, r\,dr$$

- $$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mathcal{L}^n = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta \in \partial B_1(0)} \underbrace{f(r\theta)}_{= \tilde{f}(r)} \underbrace{r^{n-1} dr\, d\theta}_{= dx_1 \cdots dx_n} \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{r=0}^{\infty} \tilde{f}(r) \underbrace{\left(\int_{\partial B_1(0)} d\theta \right)}_{=: \omega_{n-1} > 0} r^{n-1} dr$$

$d\theta =$ Oberfläche Maß auf $\partial B_1(0)$.

weil $|r\theta| = |(r\theta_1, \dots, r\theta_n)| = r \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2}}_{= 1 \text{ weil } \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \partial B_1(0) = S^{n-1}}$

$$= \omega_{n-1} \int_0^\infty \tilde{f}(r)\, r^{n-1} dr.$$

Bemerkung: Wie kann man ω_{n-1} berechnen? Hier ist ein Trick:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx \underset{\text{Polar}}{=} \int_0^\infty \int_{\partial B_1(0)} e^{-r^2} r^{n-1} dr\, d\theta = \omega_{n-1} \underbrace{\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr\, d\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{\frac{n}{2}-1} d\rho =: \Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right) \qquad \left| \begin{array}{l}\rho = r^2 \\ d\rho = 2r\,dr\end{array}\right.$$

Fubini $\|$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} dx_1\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2} dx_n\right)$$

$\|$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt\right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

wo $\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$ = Gamma Funktion von Euler

Also. $$\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

(iv) Von Definition, $x \mapsto |x|^\alpha$ Radial ist, und von (iii) mit $f(x) = |x|^\alpha \chi_{B_\rho(0)}(x)$.

$$\int_{B_\rho(0)} |x|^\alpha dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mathcal{L}^n = \omega_{n-1} \int_0^\rho r^{\alpha+n-1} dr = \begin{cases} +\infty, & \alpha+n \le 0 \\ \omega_{n-1} \dfrac{\rho^{\alpha+n}}{\alpha+n}, & \alpha+n > 0. \end{cases}$$

A46: (i) $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists\, K \subset \mathbb{R}^n$ Kompakt s.d. $\eta(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, und danach $\partial_i \eta(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Auch, $\eta \in C^\infty \Rightarrow \partial_i \eta \in C^\infty$. Das zeigt $\partial_i \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Sei $1 \le q \le \infty$. $\eta * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x-y) f(y)\, dy$.

Falls $q = \infty$: $\|\eta * f\|_{L^\infty} \le \int_{\mathbb{R}^n} |\eta(x-y)|\,|f(y)|\,dy \underset{\text{Hölder}}{\le} \|\eta(x-\cdot)\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} \underset{\text{Substitution}}{=} \|\eta\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}$

Falls $1 \le q < \infty$: Wir benutzen die Young / Faltungsatz 6.10:
wir definieren $1 \le \alpha \le \infty$ s.d. $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{p}$, und haben wir:

$\|\eta * f\|_{L^q} \underset{\text{Young}}{\le} \|\eta\|_{L^\alpha} \|f\|_{L^p} < +\infty$ weil $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \eta \in L^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha \in [1,\infty]$.

(iii) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixiert und $B_0 := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| \le 1\} = \overline{B}_1(x_0)$

Für $1 \le i \le n$, $e_i := (\delta_{ij})_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ mit $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \ne i \end{cases}$.

$$\partial_i(\eta * f)(x_0) \underset{\text{Def}}{=} \lim_{\substack{h\to 0\\ \ne}} \frac{1}{h}\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x_0 + he_i - y) f(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x_0 - y) f(y)\,dy \right\}$$

$$\underset{\text{Linearität von } \int_{\mathbb{R}^n}}{=} \lim_{\substack{h\to 0\\ \ne}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{\eta(x_0 + he_i - y) - \eta(x_0 - y)}{h}}_{=:\, F_h(y)} f(y)\,dy \underset{\text{Dominierte Konvergenz 5.21}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\substack{h\to 0\\ \ne}} F_h(y)\,dy \underset{\text{Def}}{=} (\partial_i \eta) * f(x_0).$$

weil: ✓ Für a.e. $y \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{\substack{h\to 0\\ \ne}} F_h(y) = \partial_i \eta(x_0 - y) f(y)$ existiert

✓ Für a.e. $y \in \mathbb{R}^n$, $|F_h(y)| = \underbrace{\left|\frac{\eta(x_0 + he_i - y) - \eta(x_0 - y)}{h}\right|}_{\underset{\text{Taylor}}{\le} \sup_{x \in B_0} |\partial_i \eta(x-y)| = \|\partial_i \eta(\cdot - y)\|_{L^\infty(B_0)}} |f(y)| \le \underbrace{\overbrace{\|\partial_i \eta(\cdot - y)\|_{L^\infty(B_0)}}^{\in L^{p'}(dy)} \overbrace{|f(y)|}^{\in L^p(dy)}}_{\in L^1(dy),\text{ und unabhängig von } h > 0}$

$\forall\ 0 < |h| \le 1$

A47: (i) Wir haben:

$$\mathrm{vol}_3(K) \underset{\text{Def}}{=} \mathcal{L}^3(K) \underset{\text{Cavalieri}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^2(K_z)\,dz = \pi \int_a^b f(z)^2\,dz$$

mit $K_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq f(z)^2\} = B_{f(z)}(0)$, dann $\mathcal{L}^2(K_z) = \int_0^{f(z)}\int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta = \frac{f(z)^2}{2} \times 2\pi = \pi f(z)^2$

(ii) $E_{\mu,\lambda} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq \lambda^2(1-\frac{z^2}{\mu^2})\}$ = Ellipsoid

Beachte, $1 - \frac{z^2}{\mu^2} \geq \frac{1}{\lambda^2}(x^2+y^2) \geq 0 \Rightarrow z \in [-\mu,\mu]$, somit $E_{\mu,\lambda} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq f(z)^2\}$

wo $f(z) := \lambda^2(1-\frac{z^2}{\mu^2})$ für $z \in [-\mu,\mu]$, und von (i):

$$\mathrm{vol}_3(E_{\mu,\lambda}) = \pi \int_{-\mu}^{\mu} \lambda^2\left(1-\frac{z^2}{\mu^2}\right)dz = \pi\lambda^2 \left(z - \frac{z^3}{3\mu^2}\right)\Big|_{-\mu}^{\mu} = 2\pi\lambda^2\mu \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\lambda^2\mu.$$

Beachte, wenn $\lambda = \mu$, finden wir $\mathrm{vol}_3(E_{\lambda,\lambda}) = \frac{4}{3}\pi\lambda^3$, das richtig Volumen von ein Kugel in Dimension $n = 3$.