Relle Analysis - Serie 11

A40: (i) Beachte $\operatorname{Im} \chi_C = \{0,1\}$ wenn $C = A, B$ oder $A \times B$. Also, für jedes $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^\ell$

$$\chi_A(x)\,\chi_B(y) = 1 \iff \chi_A(x) \neq 0 \text{ und } \chi_B(y) \neq 0 \iff x \in A \text{ und } y \in B \iff (x,y) \in A \times B.$$
$$\iff \chi_{A\times B}((x,y)) = 1$$

Sei $\phi : (x,y) \mapsto \chi_A(x)\chi_B(y)$. Dies zeigt $\phi = \chi_{A\times B} = 1$ auf $\phi^{-1}(\{1\}) = \chi_{A\times B}^{-1}(\{1\}) = A \times B$.
aber auch, dass $\phi = \chi_{A\times B} = 0$ auf $\phi^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^n \setminus \phi^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}^n \setminus (A \times B)$.

(ii)-(iii) Satz: In endlich Dimensionalen Räumen, alle Normen äquivalent sind.
Sei $B_{r,p}(x) := \{ y \in \mathbb{R}^p : \|x-y\|_{L^\infty(\mathbb{R}^p)} < r\}$ (Kugel für Norm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ auf $\mathbb{R}^p$) mit
$r > 0$, $p \in \mathbb{N}$ und $\|x\|_{L^\infty(\mathbb{R}^p)} = \max\limits_{1 \le i \le p} |x_i|$.

Falls A oder $B = \emptyset$. dann $A \times B = \emptyset$ offen ist, aber vieleicht B oder A nicht offen ist.
Falls A und $B \neq \emptyset$: $A \times B$ offen $\iff \forall (a,b) \in A \times B, \exists r > 0, B_{r,n}((a,b)) \subset A \times B$
$$\iff \forall a \in A, b \in B, \exists r > 0, B_{r,k}(a) \subset A \text{ und } B_{r,p}(b) \subset B$$
$$\iff A \text{ und } B \text{ offen}$$

weil. $B_{r,n}((a,b)) = (a,b) + [-r,r]^n \underset{\text{Def von } \times}{=} (a + [-r,r]^k) \times (b + [-r,r]^\ell) = B_{r,k}(a) \times B_{r,\ell}(b)$

(iv) $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow \forall B \subset \mathbb{R}^\ell, (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B) = \emptyset$, denn, $(a,b) \in (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B) \neq \emptyset$
$\Rightarrow a \in A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Widerspruch.

(v) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \emptyset \not\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Gegenbeispiel: $\begin{cases} A_1 = A_2 = \{0\} \subset \mathbb{R} \\ B_1 = \{0\},\ B_2 = \{1\} \subset \mathbb{R} \end{cases}$ Dann $A_1 \cap A_2 = A_1 = A_2 = \{0\} \neq \emptyset$, aber:
$A_1 \times B_1 = \{(0,0)\}$ und $A_2 \times B_2 = \{(0,1)\}$ sind disjunkte

(vi) Nehme $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Nehmen wir an $\exists A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$ so dass $S = A \times B$.

Dann $\left.\begin{matrix} (0,1) \in S = A \times B \Rightarrow 0 \in A \text{ und } 1 \in B \\ (1,0) \in S = A \times B \Rightarrow 1 \in A \text{ und } 0 \in B \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1,1) \in A \times B = S$. Widerspruch.

(vii) $(a,b) \in \left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \times \left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) \iff a \in \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ und $b \in \bigcup_{j=1}^\infty B_j \iff \exists i \in \mathbb{N}, a \in A_i$ und $\exists j \in \mathbb{N}, b \in B_j$
$\iff \exists (i,j) \in \mathbb{N}^2, (a,b) \in A_i \times B_j \iff (a,b) \in \bigcup_{i,j=1}^\infty A_i \times B_j$.

Dann, $(a,b) \in (A_i \times B_j) \cap (A_k \times B_\ell) \neq \emptyset \iff \begin{cases} a \in A_i \cap A_k \neq \emptyset \Rightarrow i = k \\ \text{und} \\ b \in B_j \cap B_\ell \neq \emptyset \Rightarrow j = \ell \end{cases} \iff (i,j) = (k,\ell)$.

Also, $(A_i \times B_j)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ paarweise disjunkte sind.

(viii) Sei Q ein Intervall im $\mathbb{R}^2$, D.h.: $Q = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i[=]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\subset \mathbb{R}^n$
Wir definieren $A := \prod_{i=1}^k]a_i, b_i[\subset \mathbb{R}^k$ und $B := \prod_{i=k+1}^n]a_i, b_i[$, also, finden wir dass
$Q = A \times B$.

(ix) $S \subset \mathbb{R}^n$ offen $\underset{\text{Satz 3.23}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, (Q_i)_{i=1}^{\infty}$ Folge von Intervallen s.d. $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$

$\underset{(viii)}{\Longrightarrow}$ $\forall i \in \mathbb{N},\ \exists\, A_i \subset \mathbb{R}^k$, $B_i \subset \mathbb{R}^l$ Intervallen s.d. $Q_i = A_i \times B_i$ und $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$.

A41: Wir definieren $\mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^l(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^k(A_i) . \mathcal{L}^l(B_i) : S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i,\ (A_i) \subset 2^{\mathbb{R}^k},\ (B_i) \subset 2^{\mathbb{R}^l} \text{ Intervallen} \right\}$ (*)

(i) Für jedes Intervallen $A \subset \mathbb{R}^k$ und $B \subset \mathbb{R}^l$
$A \times B = \prod_{j=1}^{n}]a_j, b_j[\subset \mathbb{R}^n$ so $\mathcal{L}^n(A \times B) \underset{\text{def von } \mathcal{L}^n}{=} Vol(A \times B) \underset{\text{def von } \mathcal{L}^k \text{ und } \mathcal{L}^l}{=} \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^l(A \times B)$.

Dann, von Fubini-Tonelli (Alternativ von Fubini wenn $f \geq 0$).

$$\mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^l(A \times B) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\chi_{A \times B}}_{= \chi_A \cdot \chi_B \text{ von A40(i)}} \, d(\mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^l) \underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_A \left(\int_{\mathbb{R}^l} \chi_B \, d\mathcal{L}^l \right) d\mathcal{L}^k = \mathcal{L}^k(A) . \mathcal{L}^l(B)$$

Also, $\mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^l(S) \underset{\text{def } (*)}{\geq} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_i \times B_i) : S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i,\ (A_i), (B_i) \text{ measurable} \right\}$ (**).

(ii) Sei $S \subset \mathbb{R}^n$. $\mathcal{L}^n$ Borelsch $\Rightarrow \exists\, (A_i)\ \mathcal{L}^k$-messbar, $(B_i)\ \mathcal{L}^l$-messbar s.d. $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$

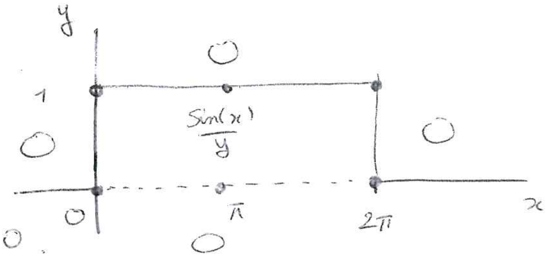
Dann, $\mathcal{L}^n(S) \underset{\sigma\text{-subadditivität}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_i \times B_i) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\tilde{A}_i \times \tilde{B}_i) \right\} \underset{(**)}{\leq} \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^l(S)$.

(iii) Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ offen. A40(ix) $\Rightarrow S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$, mit $(A_i \times B_i)_{i=1}^{\infty}$ paarweise disjunkte Intervallen

$$\mathcal{L}^n(S) \underset{\sigma\text{-additivität}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_i \times B_i) \geq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\tilde{A}_i \times \tilde{B}_i) : (\tilde{A}_i), (\tilde{B}_i) \text{ Intervallen} \right\} \underset{\text{def } (*)}{=} \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^l(S).$$

(iv) Sei $S \subset \mathbb{R}^n$. $\mathcal{L}^n(S) \underset{\text{S 3.25}}{=} \inf \{ \mathcal{L}^n(G) : G \supset S \text{ offen} \} \underset{(iii)}{\geq} \inf \{ \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^l(G) : G \supset S \text{ offen} \} \underset{\text{S. 3.25}}{=} \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^l(S)$

A42: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{y}, & 0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 < y \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$



Beachte $\forall x \in [0, 2\pi],\ \lim_{y \searrow 0} f(x,y) = \pm\infty$ aber $f(x,0) = 0$.

(i) Sei $N := (\{0;1\} \times]0,1[) \cup ((]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}) \times \{0;1\})$, dann $f : \mathbb{R}^2 \setminus N \to \mathbb{R}$ stetig ist

mit $\mathcal{L}^2(N) = 0$. Für jedes $U \subset \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^1$-messbar:

$$f^{-1}(U) = \underbrace{(f_{|\mathbb{R}^2 \setminus N})^{-1}(U)}_{\text{offen (weil } f_{|\mathbb{R}^2 \setminus N} \text{ stetig) also, auch } \mathcal{L}^2\text{-messbar}} \cup \underbrace{(f_{|N})^{-1}(U)}_{\subset N \text{ also } \mathcal{L}^2\text{-messbar}} \quad \mathcal{L}^2\text{-messbar ist.}$$

(ii) Sei $y \in \mathbb{R}$ fixiert. Falls $y \in \mathbb{R} \setminus]0,1]$: $f(x,y) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, also, $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx = 0$.
Falls $y \in]0,1]$: $f(x,y) = \frac{\sin(x)}{y} \chi_{[0,2\pi]}(x)$, also, $\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx = \frac{1}{y} \int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx = 0$ denn sin ungerade und 2π-periodisch.
Wir schließen dass $g: y \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx = 0$ ist die Null Funktion, so ist übersichtlich messbar und integrierbar in die Variable y für die Lebesgue Maß $\mathcal{L}^1$ (oder durch benutzen Korollar 5.17).

(iii) Sei $x \in \mathbb{R}$ fixiert. Falls $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 2\pi)$: $f(x,y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, so, $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy = 0$.
Falls $x \in [0, 2\pi)$: $f(x,y) = \frac{\sin(x)}{y} \chi_{]0,1]}(y)$. dann:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy = \sin(x) \underbrace{\int_0^1 \frac{dy}{y}}_{= \ln(y)\Big|_0^1 = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \lim_{y \to 0} \ln(y) = +\infty} = \operatorname{sgn}(\sin(x)) \times +\infty = \begin{cases} +\infty, &]0,\pi[\ni x \\ 0, & x \in \{0; \pi; 2\pi\}. \\ -\infty, & x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

und so: $$h(x) := \begin{cases} +\infty, & x \in]0,\pi[=: I_{+\infty} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (]0,\pi[\cup]\pi, 2\pi[) =: I_0 \\ -\infty, & x \in]\pi, 2\pi[=: I_{-\infty} \end{cases} = \left(x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \right)$$

- h ist $\mathcal{L}^1$-messbar in x: für $U \subset \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, messbar Teilmenge, haben wir:
$$h^{-1}(U) = \bigcup_{\substack{\alpha \in \{-\infty; 0; +\infty\} \\ \text{s.d. } \alpha \in U}} I_\alpha$$ auch $\mathcal{L}^1$-messbar, weil jedes I_α messbar ist.
- $\int_{\mathbb{R}} |h|\, dx = +\infty \times \mathcal{L}^1(]0,\pi[\cup]\pi, 2\pi[) = +\infty$, also, h nicht $\mathcal{L}^1$-integrierbar ist.

(iv) Zu benutzen Fubini, brauche man dass beide g und h in $L^1(\mathbb{R})$ liegen.

(v) Die Funktion $(x_1, x_2) \xrightarrow{\phi} \sin(x_1)\, e^{\sin(\log(\pi + |x_2|^2))}$ ist klar stetig (auch C^∞) auf $\overline{Q} = [-\pi, \pi]^2$, die Kompakt ist, und so ϕ ist beschränkt auf $Q \subset \overline{Q}$
D.h. $\phi \in L^\infty(Q) \subset L^1(Q)$, und durch Fubini, finden wir:

$$\int_Q \phi\, dx = \int_{(-\pi,\pi)} e^{\sin(\log(\pi + |x_2|^2))} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x_1)\, dx_1 \right)}_{= 0, \text{ denn sin ungerade}} dx_2 = 0.$$

A43: Beweisen wir die Aufgabe mit die Drei folgenden Schritte:

- Wenn $f = \chi_A$ für $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann, $f_a(x) = \chi_A(x+a) = \chi_{-a+A}(x)$, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_a\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{-a+A}\, d\mu = \mu(-a+A) = \mu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu.$$

A messbar $\Rightarrow$ $-a+A$ messbar $= \{-a + x : x \in A\}$ $\qquad$ μ translationsinvariant

•) <u>Wenn $f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{A_i}$ ist ein Treppenfunktion</u> : $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$

Dann, $f_a = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{-a+A_i}$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f_a \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \underbrace{\mu(-a+A_i)}_{=\mu(A_i)} = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$.

•) <u>Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:</u> Sei $T_f := \{ g$ Treppenfunktion s.d. $f \leq g$ μ-a.e., $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \}$.

Beachte $f \leq g$ μ-a.e. $\Longleftrightarrow$ $f_a \leq g_a$ μ-a.e., so $g \in T_f \Longleftrightarrow g_a \in T_{f_a}$.

D.h., existiert eine Bijektion $T_f \xrightarrow[\phi]{\sim} T_{f_a}$, so mit Definition $\overline{\int_{\mathbb{R}^n}} f \, d\mu = \inf_{g \in T_f} \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\mu$

kann man zeigen dass $\overline{\int_{\mathbb{R}^n}} f \, d\mu = \overline{\int_{\mathbb{R}^n}} f_a \, d\mu$.

Natürlich, $\underline{\int_{\mathbb{R}^n}} f \, d\mu = \underline{\int_{\mathbb{R}^n}} f_a \, d\mu$ gleich auch wahr, ~~und~~ wir haben

$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f_a \, d\mu$.