Relle Analysis. Serie 10.

**A36:** (i) Sei $1 \leq p, q, r \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

Falls $r = \infty$: $p = q = r = \infty$, Hölder nun ist $\|fg\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^\infty}$. $\left(\begin{array}{l}\sup(A \cdot B) \\ \leq \sup(A) \cdot \sup(B)\end{array}\right)$

Falls $r < \infty$: Young: $\forall a, b > 0$: $ab \leq \frac{a^\alpha}{\alpha} + \frac{b^\beta}{\beta}$, für $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Beweis:
log Konkave ist $\Rightarrow$ $\log\left(\frac{1}{\alpha} a^\alpha + \frac{1}{\beta} b^\beta\right) \geq \frac{1}{\alpha} \log(a^\alpha) + \frac{1}{\beta} \log(b^\beta) = \log(ab)$.
(ie. $\log'' \leq 0$ hier: $\log c^2$)

Sei nun $\alpha := \frac{p}{r}$, $\beta := \frac{q}{r}$ und $\tilde{f} := \frac{f}{\|f\|_{L^p}}$, $\tilde{g} := \frac{g}{\|g\|_{L^q}}$ (Wenn $\|f\|_{L^p}$ oder $\|g\|_{L^q} = 0$ haben wir $fg = 0$ also, Hölder ist ok.)

Für $\mu$-a.e. $x \in \Omega$:

$$|(\tilde{f}\tilde{g})(x)|^r \underset{\text{Young}}{\leq} \frac{(|\tilde{f}(x)|^r)^\alpha}{\alpha} + \frac{(|\tilde{g}(x)|^r)^\beta}{\beta} = \frac{r}{p} |\tilde{f}(x)|^p + \frac{r}{q} |\tilde{g}(x)|^q$$

Also, mit Monotonie von $\int d\mu$: $\|\tilde{f}\tilde{g}\|_{L^r}^r = \int_\Omega |\tilde{f}\tilde{g}|^r d\mu \leq \frac{r}{p} \underbrace{\|\tilde{f}\|_{L^p}^p}_{=1} + \frac{r}{q} \underbrace{\|\tilde{g}\|_{L^q}^q}_{=1} = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1$

$\Rightarrow \left\| \frac{fg}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \right\|_{L^r} \leq 1$ und das Resultat folgt mit Homogenität von $\|\cdot\|_{L^r}$.

(ii) $p \leq q \Rightarrow \frac{1}{p} \geq \frac{1}{q}$ also, wir können $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq 0$ definiert, s.d. $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$

und jetzt: $\|f\|_{L^p} = \|f \chi_\Omega\|_{L^p} \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L^q} \|\chi_\Omega\|_{L^r} = \|f\|_{L^q} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.

mit $\|\chi_\Omega\|_{L^r} = \left(\int_\Omega \underbrace{|\chi_\Omega|^r}_{=1} d\mu\right)^{1/r} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{r}}$ (Groß Normen $L^q$ kontrollen kleine $L^p$ Normen)

(iii) $\| |f|^r \|_{L^p} = \left(\int_\Omega (|f|^r)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left[\left(\int_\Omega |f|^{pr} d\mu\right)^{\frac{1}{pr}}\right]^r = \|f\|_{L^{pr}}^r$

(iv) $|f| \leq |g|$ $\mu$-a.e. $\Rightarrow |f|^p \leq |g|^p$ $\mu$-a.e. wenn $p < \infty$ (denn $x \mapsto x^p$ isoton ist)

$\underset{\text{Monotonie von } \int d\mu}{\Rightarrow}$ $\|f\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^p}$. Wenn $p = \infty$, das Resultat direkte ist.

**A37:** Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Haben wir $\chi_A$ = Treppenfunktion mit $\operatorname{Im} \chi_A = \chi_A(\mathbb{R}^n) = \{0, 1\}$.

Falls $p < \infty$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|\chi_A(x)|^p = \chi_A(x)$, also, $\|\chi_A\|_{L^p} = \|\chi_A\|_{L^1}^{\frac{1}{p}}$ mit:

$$\|\chi_A\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \, d\mathcal{L}^n = \text{"}\sum_{0 \leq a < \infty}\text{'} a \, \mathcal{L}^n(\chi_A^{-1}(\{a\})) = 0 \cdot \mathcal{L}^n(\underbrace{\chi_A^{-1}(\{0\})}_{= \mathbb{R}^n \setminus A}) + 1 \cdot \mathcal{L}^n(\underbrace{\chi_A^{-1}(\{1\})}_{= A})$$

$= \mathcal{L}^n(A) = |A|$, also: $\|\chi_A\|_{L^p} = |A|^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty]$

Falls $p = \infty$: $\|\chi_A\|_{L^\infty} = \mathcal{L}^n\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |\chi_A(x)| = \inf\{c > 0 : |\chi_A| \leq c \;\; \mathcal{L}^n\text{-a.e.}\}$.

Falls: $|A| = 0$, $\chi_A = 0$ $\mathcal{L}^n$-a.e und $\|\chi_A\|_{L^\infty} = 0$

Falls $|A| > 0$: $\chi_A = 1$ on $A$: $\|\chi_A\|_{L^\infty} = 1$.

(i) $\|\chi_A\|_{L^p} = \begin{cases} |A|^{1/p} & , p<\infty \\ 0 & , p=\infty \text{ und } |A|=0. \\ 1 & , p=\infty \text{ und } |A|\neq 0. \end{cases}$ (ii) $\|\chi_A\|_{L^p} = \begin{cases} \infty, & p<\infty \\ 1, & p=\infty. \end{cases}$

(iii) $|\mathbb{Q}|=0$ denn $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, also $\chi_{\mathbb{Q}}=0$ $\mathcal{L}^1$-a.e. und:

$\|\chi_{\mathbb{Q}}\|_{L^p} = \begin{cases} 0, & p<\infty \\ 0, & p=\infty \end{cases}$ $\therefore$ $\chi_{\mathbb{Q}}=0$ in jedes $L^p$.

(iv) $A=(0,\infty)$ ist wie (ii) wenn $|A|=\infty$.

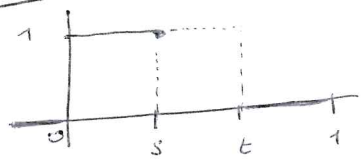
(v) $\left.\begin{matrix} f \text{ stetig} \\ K \text{ kompakt} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $f$ beschränkt ist
$\exists M>0$ s.d. $|f|\leq M$ auf $K$

Bk: $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}^n\setminus K$
$\Rightarrow |f(x)|\leq M$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$
$\Rightarrow \|f\|_{L^\infty}\leq M$

Wenn $p<\infty$, $\|f\|_{L^p} = \left(\int_K |f|^p d\mu\right)^{1/p} \leq M\mu(K)^{\frac{1}{p}} < +\infty$.

Bk: Wenn $p=\infty$: $\left.\begin{matrix} f \text{ stetig} \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \|f\|_{L^\infty} < +\infty$.

A38: (i) Für $0<t\neq s<1$, $f_t - f_s = \pm\chi_{]\min(s,t);\max(s,t)]}$



also $\|f_t-f_s\|_{L^\infty} = \|\chi_{]\min(s,t),\max(s,t)]}\|_{L^\infty} \underset{\Uparrow}{=} 1$

(D.h. $\mathcal{L}^1(]\min(\dots),\max(\dots)]) > 0$) weil $|\min(\dots)-\max(\dots)| = |t-s| > 0$.

(ii) Was ist, wenn für ein $k\in\mathbb{N}$ fixiert, es gibt zwei $t_1\neq t_2\in(0,1)$ s.d.
$\|g_k - f_{t_j}\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}$, $j=1,2$ ? Haben wir dann

$\|f_{t_1}-f_{t_2}\|_{L^\infty} \leq \|f_{t_1}-g_k\|_{L^\infty} + \|g_k - f_{t_2}\|_{L^\infty} < 1$. Widerspruch von (i)

(iii) Sei $(g_k)_{k=1}^\infty \subset L^\infty$ eine abzählbare Menge. $\forall k\in\mathbb{N}$, können wir mit (ii) $t_k\in(0,1)$ finden s.d. $\|g_k - f_t\|_{L^\infty} \geq \frac{1}{2}$, $\forall t\in(0,1)\setminus\{t_k\}$.

Setzen wir $t_0\in(0,1)\setminus\bigcup_{k=1}^\infty\{t_k\}$, Finden wir nun $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}\|g_k-f_{t_0}\|_{L^\infty} \geq \frac{1}{2}$

Dies sagt es gibt keine Menge $(g_k)\subset L^\infty$ s.d.
$\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}\|g_k - f_t\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}$, $\forall t\in(0,1)$ (nehme $t=t_0$).

(iv) Beweis durch Widerspruch. Sei $V=\{g_k : k\in\mathbb{N}\}\subset L^\infty([0,1])$ eine abzählbare Menge das liegt dicht in $L^\infty([0,1])$

D.h. $\forall f\in L^\infty([0,1])$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists g=g_k\in V$ s.d. $\|f-g_k\|_{L^\infty} < \varepsilon$ (*).

Aber von (iii), wir wissen es gibt ein $\tau \in (0,1) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{t_k\}$ s.d.

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \| g_k - f_\tau \|_{L^\infty} \geq \frac{1}{2}.$$

Dies zeigt, dass $f = f_\tau \in L^\infty([0,1])$ mit $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ widerspricht (*).

A39: (i) $\delta_{\mathbb{N}}$ ist ein Radon-Maß ($\delta_{\mathbb{N}}$ ist ein Maß von A11)

- $\delta_{\mathbb{N}}$ lokal-endlich ist: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, $\exists r > 0$ s.d. $K \subset [-r, r]$

also, $\delta_{\mathbb{N}}(K) \leq \delta_{\mathbb{N}}([-r,r]) \leq 2r+1 < +\infty$.

- $\delta_{\mathbb{N}}$ Borel-regulär ist: Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $B := \overline{A} \setminus (A^c \cap \mathbb{N})$

- $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : \exists (a_k) \subset A \text{ s.d. } x = \lim_{k \to +\infty} a_k\}$ ist die abgeschlossene Hülle von $A$

also $\overline{A}$ abgeschlossen ist $\Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

- $A^c \cap \mathbb{N}$ ist eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$, also, Borelsch ist und wie so ist $(A^c \cap \mathbb{N})^c$

Dann, $B = \overline{A} \cap (A^c \cap \mathbb{N})^c = \overline{A} \cap ((A^c)^c \cup \mathbb{N}^c) = \overline{A} \cap (A \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}))$

$$\underset{\substack{\text{distributivität} \\ \text{von } \cap}}{=} (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})) = A \cup (\overline{A} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})) \supset A$$

Es folgt dass $B \cap \mathbb{N} = (A \cap \mathbb{N}) \cup [\underbrace{(\overline{A} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})) \cap \mathbb{N}}_{= \emptyset}] = A \cap \mathbb{N}$, also, $\delta_{\mathbb{N}}(B) = \delta_{\mathbb{N}}(A)$.

(ii) $\delta_{\mathbb{N}}(A) = 0 \iff \#(A \cap \mathbb{N}) = 0 \iff A \cap \mathbb{N} = \emptyset \iff A \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(iii) $\phi(f) \underset{\text{def}}{=} (f(i))_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $f, g \in L^p$

$$\phi(\lambda f + \mu g) = ((\lambda f + \mu g)(i))_{i=1}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ L^p \text{ ein Vektorraum ist}}}{=} (\lambda f(i) + \mu g(i))_{i=1}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ ein Vektorraum ist}}}{=} \lambda (f(i))_{i=1}^{\infty} + \mu (g(i))_{i=1}^{\infty}$$

(iv) Wenn $p < \infty$, für $\delta_{\mathbb{N}}$-a.e. $x \in \mathbb{R}$: $|f(x)|^p = |f(x)|^p \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \chi_{\{k\}}}_{\substack{= 1 \text{ weil } \delta_{\mathbb{N}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = 0. \\ \delta_{\mathbb{N}}\text{-a.e.}}}$

also, $|f|^p = \sum_{k \in \mathbb{N}} |f(k)|^p \chi_{\{k\}}$, $\delta_{\mathbb{N}}$-a.e.

und dann $|f|^p$ ist eine Treppenfunktion so dass:

$$\|f\|_{L^p(\delta_{\mathbb{N}})} = \left( \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |f(k)|^p \chi_{\{k\}} \, d\delta_{\mathbb{N}} \right)^{1/p} = \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} |f(k)|^p \, \delta_{\mathbb{N}}(\chi_{\{k\}}^{-1}(\{k\})) \right)^{1/p}$$

$$= \| \phi(f) \|_{\ell^p}.$$

(v) $\phi$ <u>injektiv</u> $\overset{\underline{\text{Linearität von } \phi}}{\iff}$ $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$ (mit $\operatorname{Ker} \phi = \phi^{-1}(\{0\})$)

$\iff$ $(\phi(x) = 0 \implies x = 0)$

Aber $\phi(f) = 0 \underset{(iv)}{\iff} 0 = \|\phi(f)\|_{\ell^p} = \|f\|_{L^p} \iff f = 0$ in $L^p$

D.h. $f = 0$ $\delta_{\mathbb{N}}$ - a.e.

(vi) $\phi$ <u>surjektiv</u> $\iff$ $\operatorname{Im} \phi = \ell^p(\mathbb{N})$ ("$\subset$" immer wahr).

Sei $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p(\mathbb{N})$. Setzen wir wie in (iv):

$f \underset{\underline{\text{def}}}{:=} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \chi_{\{k\}}$ ($\delta_{\mathbb{N}}$ - a.e. definiert) und wir finden

$(a_k)_{k=1}^{\infty} = \phi(f)$ mit $\|f\|_{L^p} = \|\phi(f)\|_{L^p} = \|(a_k)\|_{\ell^p} < +\infty$

also $f \in L^p$ und $\underline{\ell^p \subset \operatorname{Im} \phi}$.