Aufgabe 31

$$\bar{u}(t,z) = \lim_{j\to\infty}\left(\sup\{u_n(s,x) \mid n \geq j,\ (s,x)\in B_{\frac{1}{j}}(t,z)\}\right)$$

Beh: $\exists$ Teilfolgen n_j, (s_j,x_j) mit $u_{n_j}(s_j,x_j) \to \bar{u}(t,z)$ und $(s_j,x_j)\to(t,z)$

Bew: Sei $\varepsilon>0$. Nach Def von $\bar{u}$ $\exists\, j\in\mathbb{N}$:

$$\left|\bar{u}(t,z) - \sup\{u_n(s,x) \mid n\geq j,\ (s,x)\in B_{\frac{1}{j}}(t,z)\}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nach Def. von "sup" $\exists\, n_j, (s_j,x_j)$:

$$\sup\{u_n(s,x)\mid\dots\} - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_{n_j}(s_j,x_j) \leq \sup\{u_n(s,x)\mid\dots\}$$

$$\Rightarrow \left|u_{n_j}(s_j,x_j) - \sup\{u_n(s,x)\mid\dots\}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Insgesamt:

$$|\bar{u}(t,z) - u_{n_j}(s_j,x_j)| < \varepsilon.$$

Wegen der Bedingung $(s_j,x_j)\in B_{\frac{1}{j}}(t,z)$ gilt auch: $(s_j,x_j)\to(t,z)$

Jetzt weiter wie im Skript:

Sei $(t_0,x_0)\in Q$ und $(\alpha, p, X)\in \mathcal{P}^+(u)(t_0,x_0)$. Zu zeigen:

$$\alpha + F(t_0,x_0,p,X) \leq 0.$$

Nach der Beh $\exists\, u_n, (t_n,x_n)$:

$$(t_n,x_n)\to(t_0,x_0) \quad \text{und} \quad u_n(t_n,x_n)\to\bar{u}(t_0,x_0)$$

Sei $r\in(0,1)$ und $(\hat{t}_n,\hat{x}_n)$ Max. auf $\overline{B_r(t_0,x_0)}$ von folgender Funktion:

$$w(s,y) := u_n(s,y) - p\cdot(y-x_0) - \alpha(s-t_0) - \frac{1}{2}(y-x_0)^T X(y-x_0)$$

Aus $w(s,y)\leq w(\hat{t}_n,\hat{x}_n)$ folgt

$$u_n(s,y) \leq u_n(\hat{t}_n,\hat{x}_n) + p\cdot(y-\hat{x}_n) + \alpha(s-\hat{t}_n) + \frac{1}{2}(y-x_0)^T X(y-x_0) - \frac{1}{2}(\hat{x}_n-x_0)^T X(\hat{x}_n-x_0)$$
$$=: \varphi_n(s,y)$$

Offenbar gilt: $u_n(\hat{t}_n,\hat{x}_n) = \varphi_n(\hat{t}_n,\hat{x}_n)$

$\Longrightarrow \varphi_n$ ist glatte Testfunktion mit $\varphi_n \geq u_n$ in $(\hat{t}_n, \hat{x}_n)$.

Da u_n Unterlösung ist, gilt

$$\partial_s \varphi_n(\hat{t}_n, \hat{x}_n) + F(\hat{t}_n, \hat{x}_n, \nabla\varphi_n(\hat{t}_n, \hat{x}_n), D^2\varphi_n(\hat{t}_n, \hat{x}_n)) \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha + F\big(\hat{t}_n, \hat{x}_n, p + X(\hat{x}_n - x_0), X\big) \leq 0$$

Bis auf TF gilt $(\hat{t}_n, \hat{x}_n) \longrightarrow (\bar{t}, \bar{x}) \in \overline{B_r(t_0, x_0)}$

$$\overset{F \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \quad \alpha + F(\bar{t}, \bar{x}, p + X(\bar{x} - x_0), X) \leq 0$$

Dies gilt für alle $r \in (0,1)$. Mit $r \to 0$ gehen $(\bar{t}, \bar{x}) \longrightarrow (t_0, x_0)$ und es folgt

$$\alpha + F(t_0, x_0, p, X) \leq 0$$

$\Longrightarrow \varphi_n$ ist glatte Testfunktion mit $\varphi_n \geq u_n$ in $(\hat{t}_n, \hat{x}_n)$.

Da u_n Unterlösung ist, gilt

$$\partial_s \varphi_n(\hat{t}_n, \hat{x}_n) + F(\hat{t}_n, \hat{x}_n, \nabla \varphi_n(\hat{t}_n, \hat{x}_n), D^2 \varphi_n(\hat{t}_n, \hat{x}_n)) \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha + F(\hat{t}_n, \hat{x}_n, p + X(\hat{x}_n - x_0), X) \leq 0$$

Bis auf TF gilt $(\hat{t}_n, \hat{x}_n) \to (\bar{t}, \bar{x}) \in \overline{B_r(t_0, x_0)}$

$$\overset{F \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \quad \alpha + F(\bar{t}, \bar{x}, p + X(\bar{x} - x_0), X) \leq 0$$

Dies gilt für alle $r \in (0,1)$. Mit $r \to 0$ gehen $(\bar{t}, \bar{x}) \to (t_0, x_0)$ und es folgt

$$\alpha + F(t_0, x_0, p, X) \leq 0$$

(ii) $$\mathcal{P}^+(M-N) = \sup_A \left(-\operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(AN)\right)$$
$$\geq \sup_A \left(-\operatorname{tr}(AM)\right) - \sup_A \left(-\operatorname{tr}(AN)\right)$$
$$= \mathcal{P}^+(M) - \mathcal{P}^+(N)$$

(iii) Folgt aus Eigenschaften von inf, sup.

(iv) Folgt aus (i) und Def. von HS-Norm: $\|A\|_{HS} = \operatorname{tr}(A^*A)$

(v) Folgt aus Eigenschaften von inf, sup.

(vi) ähnlich wie (ii)

(vii) Sei F glm. elliptisch und $X - Y \geq 0$. Dann:

$$F(X) - F(Y) \leq \mathcal{P}^+(X-Y)$$
$$\Longleftrightarrow \quad F(Y) \leq F(X) + \underbrace{\mathcal{P}^+(X-Y)}_{\leq 0, \text{ denn: } \mathcal{P}^+(X-Y) = -\lambda \sum_i (x_i - y_i) \leq 0}$$

(x_i, y_i ... EW von X, Y)